كلية العلوم
جامعة عبد المالك السعدي
Université Abdelmalek Essaadi

Filières SMP/SMC — Année Universitaire 2014/2015

Travaux Dirigés

Analyse II

Série 2

Exercice I. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $\left(x^2+1\right)\, y' + x\, y = 0;$ 2) $x\, y' = y\left(1+\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$
3) $y' + y = e^x + \sin x;$ 4) $(x+1)\, y' - y = \ln x.$

Exercice II.

1) Calculer $\displaystyle\int e^x (x-1)\, dx.$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^x$.

2) Montrer que $f(x) = e^{-x} g(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = x - 1; \qquad (E)$$

3) Montrer que la solution générale y de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{-x} + f(x), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

4) Déterminer la solution de l'équation (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice III.

1) Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$y' = 2y + 8; \qquad (E_1)$$

Soit f une solution de l'équation (E_1).

2) $a)$ Montrer que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante.

$$x\,y' - (2x+1)\,y = 8x^2; \qquad (E_2)$$

$b)$ Déduire toutes les solutions de l'équation (E_2).

3) Déterminer la solution h de l'équation (E_2) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2, 0)$.

Exercice IV.

Résoudre l'équation de Bernoulli suivante.

$$x\,y' + y = y^2\,\ln x.$$

Exercice V. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes.

1) $y'' + 2y' = 0.$

2) $y'' + 9y = 0.$

3) $y'' + 2y' + y = 2.$

4) $y'' + y' + y = x^2 + x + 1.$

5) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}.$

6) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big).$

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

1) $\left(x^2+1\right)\, y' + x\, y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\, y.$

C'est une équation à variables séparées.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{x^2+1}\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{-x}{x^2+1}\, dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2}\ln(x^2+1) + cte = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{-\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)} e^{cte} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte} \frac{1}{e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)}} \\
&\Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) $x\, y' = y\left(1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) \Rightarrow y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right).$

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = t(1+\ln t)$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\, x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} + u = f(u) = u(1+\ln u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} &= u(1+\ln u) - u = u\ln u \\
&\Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{du}{u\ln u} + cte = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} + cte = \ln\left(|\ln u|\right) + cte \\
&\Rightarrow |x| = e^{\ln(|\ln u|)} e^{cte} = e^{cte}|\ln u| \\
&\Rightarrow \ln u = Cx; \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow u = e^{Cx}; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$y = ux = xe^{Cx}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) $y' + y = e^x + \sin x$.

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$.

On a

$$\begin{aligned} y' + y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte} e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte} e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' + y = e^x + \sin x$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x} \int (e^x + \sin x)e^x \, dx \\ &= e^{-x} \int e^{2x} \, dx + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx \\ &= e^{-x} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx \\ &= \frac{e^x}{2} + e^{-x} \int \sin x \, e^x \, dx \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int \sin x\, e^x\, dx &= \int (e^x)' \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x\, dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx\end{aligned}$$

Donc

$$2 \int \sin x\, e^x\, dx = e^x (\sin x - \cos x).$$

Ce qui implique

$$\int \sin x\, e^x\, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x).$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + \frac{e^x}{2} + \frac{\sin x - \cos x}{2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) $(x+1)\, y' - y = \ln x.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $(x+1)\, y' - y = 0.$

On a

$$\begin{aligned}(x+1)\, y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + cte = \ln(x+1) + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}(x+1) \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x+1).\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $(x+1)\,y' - y = 0$ est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx &= -\int \left((x+1)^{-1}\right)' \ln x\,dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1)\left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k(x+1) - \ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice II.

1) $\int e^x(x-1)\,dx$ est une primitive de la fonction $e^x(x-1)$. On a

$$\begin{aligned}
\int e^x(x-1)\,dx &= \int (e^x)'(x-1)\,dx = e^x(x-1) - \int e^x\,dx \\
&= e^x(x-1) - e^x + C = e^x(x-2) + C; \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Soit $g(x) = (x-2)e^x; \quad x \in \mathbb{R}$. La fonction g est primitive de la fonction $e^x(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = e^{-x}g(x) = x-2$. Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' + f = 1 + x - 2 = x - 1$. Par suite, f est solution de l'équation $y' + y = x - 1$.

3) On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' + y = 0$._

$$\begin{aligned} y' + y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x + cte \\ &\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{-x} \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = ke^{-x}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' + y = e^x + \sin x$ est de la forme

$$y_p(x) = k(x)e^{-x}.$$

On calcule y'_p et on remplace dans l'équation $y' + y = x - 1$, on trouve que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{-x}\int (x-1)e^x \, dx = e^{-x}g(x) \qquad (\text{car } g \text{ est primitive de } e^x(x-1)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y' + y = x - 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-x} + f(x); \quad k \in \mathbb{R}.$$

4) Soit y la solution de (E) telle que $y(1) = 0$. On a

$$y(1) = 0 \Rightarrow ke^{-1} + 1 - 2 = 0 \Rightarrow ke^{-1} = 1 \Rightarrow k = e.$$

Donc, $y(x) = e^{1-x} + f(x) = e^{1-x} + x - 2$ est solution de (E) telle que $y(1) = 0$.

Exercice III.

1) $y' = 2y + 8 \Rightarrow y' - 2y = 8.$

C'est une équation linéaire.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - 2y = 0.$_

$$\begin{aligned}
y' - 2y = 0 \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dx} = 2y \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = 2dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = 2x + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{cte}e^{2x} \\
&\Rightarrow y = \pm e^{cte}e^{2x}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est

$$y_h(x) = Ce^{2x}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $y' - 2y = 8$ est de la forme

$$y_p(x) = C(x)e^{2x}.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y' - 2y = 8$, on trouve que

$$y_p(x) = e^{2x}\int 8e^{-2x}\,dx = 8e^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) = -4.$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - 2y = 8$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{2x} - 4; \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) $a)$ Soit $g(x) = xf(x)$ avec f solution de l'équation (E_1). On a

$$\begin{aligned}
x\,g' - (2x+1)\,g &= x(f + xf') - (2x+1)\,xf \\
&= xf + x^2f' - 2x^2f - xf \\
&= x^2(f' - 2f) = 8x^2 \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E_1)\text{)}.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction g est solution de l'équation (E_2).

$b)$ Utilisant le fait que $f(x) = Ce^{2x} - 4;\quad C \in \mathbb{R}$ est solution générale de l'équation (E_1), alors les solutions de l'équation (E_2) sont de la forme

$$g(x) = xf(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big); \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Soit h solution de l'équation (E_2). Alors, $h(x) = x\Big(Ce^{2x} - 4\Big)$.

Comme $A(\ln 2, 0) \in C_h$, alors $h(\ln 2) = 0$, c'est à dire, $\ln 2\Big(Ce^{2\ln 2} - 4\Big) = 0$. Par suite, $C = 1$.

Il résulte que $h(x) = x\Big(e^{2x} - 4\Big)$.

Exercice IV.

On veut résoudre l'équation de Bernoulli $x\,y' + y = y^2\,\ln x$.

On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} x\,y' + y = y^2\,\ln x &\Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2 \\ &\Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}yy^{-2} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Rightarrow -\left(y^{-1}\right)' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x} \\ &\Rightarrow \left(y^{-1}\right)' - \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{-\ln x}{x}. \end{aligned}$$

On pose $u = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $u' - \dfrac{1}{x}u = 0.$_

$$\begin{aligned} u' - \frac{1}{x}u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + cte = \ln x + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte}x \Rightarrow u = \pm e^{cte}x. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{x}u = 0$ est

$$u_h(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation $u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}$ est de la forme

$$u_p(x) = k(x)x.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}$, on trouve que

$$u_p(x) = -x \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= -\int \left(x^{-1}\right)' \ln x\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Donc

$$u_p(x) = -x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx + \ln x + 1; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx + \ln x + 1}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice V.

1) $y'' + 2y' = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale est

$$y(x) = C_1\, e^0 + C_2\, e^{-2x} = C_1 + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y'' + 9y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 9 = 0.$

Elle admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1 = 3i$ et $\lambda_2 = -3i.$

Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^0\Big(C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x)\Big) = \Big(C_1\, \cos(3x) + C_2\, \sin(3x)\Big); \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) $y'' + 2y' + y = 2.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$

Elle admet une racine réelle double $\lambda = -1.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big); \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme 2 est une solution constante évidente de l'équation $y'' + 2y' + y = 2,$ alors la solution générale de cette équation est

$$y(x) = y_h(x) + 2 = e^{-x}\Big(C_1\, x + C_2\Big) + 2; \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4) $y'' + y' + y = x^2 + x + 1.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' + y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$

Comme $\Delta = -3 < 0$, alors elle admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 2 et on a $1 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$, on trouve

$$ax^2 + (2a + b)x + 2a + b + c = x^2 + x + 1.$$

On obtient par identification $a = 1,\ b = -1$ et $c = 0.$

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = x^2 - x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x^2 - x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5) $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}.$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0.$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2.$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = -2$ et $n = 2.$

comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{-2x}\, x\, Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{-2x}\, x\left(ax^2 + bx + c\right) == e^{-2x}\left(ax^3 + bx^2 + cx\right); \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Alors, $y_p(x) = e^{-2x}\, u(x).$

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$, on trouve

$$-9ax^2 + (6a - 6b)x + 2b - 3c = x^2.$$

On obtient par identification $a = \frac{-1}{9}$, $b = \frac{-1}{9}$ et $c = \frac{-2}{27}$.

Donc

$$u(x) = \frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-2x}\, u(x) = e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + y' - 2y = x^2 e^{-2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + +C_2\, e^{-2x} + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = C_1\, e^x + e^{-2x}\left(\frac{-1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + C_2\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 2y' + 5y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$.

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\, \cos(2x) + C_2\, \sin(2x)\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.

comme $-1+2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}\, z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$, on trouve

$$\Big(4B - 2\Big)\cos(2x) + \Big(3 - 4A\Big)\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x) = x\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x}\,z(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\Big(C_1\,\cos(2x) + C_2\,\sin(2x)\Big) + xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x + C_1\right)\cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin(2x)\right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$