Filières SMP/SMC

Année Universitaire 2018-2019

Travaux Dirigés : Analyse II

Série 1

Exercice I. Montrer que les séries suivantes sont convergentes. Calculer leurs sommes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{6^n}+(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Exercice II. Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{1-v_n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{u_n\, v_n}$.

Exercice III. Soient $(u_n)_n$ une suite réelle strictement positive et strictement croissante et $(v_n)_n$ la suite définie par

$$v_n=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n},\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que si la suite $(u_n)_n$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ converge aussi.

Exercice IV. Etudier la nature des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^a},\ \ a>0;$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2},\ \ x\in\mathbb{R};$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(3+(-1)^n\right)^{-n};$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^{n};$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^{\ln n},\ \ x>0;$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2};$

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}};$ 8) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n\frac{n}{n^2-1}.$

Exercice V. Calculer les intégrales simples suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_2^{4} \frac{3}{2x\,(\ln x)^2}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{1} x\arctan x\,dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx.$

Exercice VI. Calculer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx\,;$

3) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}\,dx.$

Exercice VII. Calculer les intégrales trigonométriques suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x};$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx;$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx.$

Exercice VIII. Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx;$ 4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$

Exercice IX. Etudier la nature des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx;$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\lambda}+x^{2-\lambda}}{x^3+1}\,dx,\ \ 0<\lambda<1;$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx;$

4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{x}\,dx;$ 5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx;$ 6) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}.$

Exercice X. Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(t)=\displaystyle\int_1^{t} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx.$

1) Calculer $F(t)$.

2) En déduire que l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Solutions des Exercices

Série 1

Exercice I.

1) On a $(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\frac{-1}{4}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

2) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{6^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$.

On a $(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{-1}{9}\right)^n$. Comme $\left|\frac{-1}{9}\right| < 1$, alors $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ est une série géométrique convergente. Donc, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$.

Par suite, la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right)$ est convergente. Sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{6^n} + (-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{6^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{6}{5} + \frac{9}{10} = \frac{21}{10}.$$

3) On pose $u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la décomposition en éléments simples, on obtient

$$u_n = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On pose $v_n = \frac{1}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc la série télescopique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = 1.$$

4) On pose $u_n = \dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$ alors $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{(n+2)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose $v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, on dit que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est une série télescopique.

Soit S_n la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$. Donc,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = v_0 = 1$. Donc, la série télescopique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1.$$

Exercice II.

1) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{1-v_n}$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. D'où, $\dfrac{u_n}{1-v_n} \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ et

$$\frac{u_n}{1-v_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{1-v_n}$ est convergente aussi d'après le critère d'équivalence.

2) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{u_n\, v_n}$.

On a

$$0 \leq \sqrt{u_n\, v_n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{u_n}{2} + \dfrac{v_n}{2}\right)$ est aussi une série à termes positifs convergente. Donc, $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{u_n\, v_n}$ est une série convergente d'après le critère de comparaison.

Exercice III.

Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, strictement croissante et convergente vers l. Alors nécessairement $l > 0$. Donc

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{l}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ est une série télescopique convergente.

En effet,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_0) = l - u_0,$$

et donc, $\sum\limits_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n) = l - u_0$.

Il résulte que $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente d'après le critère d'équivalence.

Exercice IV.

1) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{a^n}{n^a},\ \ a>0$.

C'est une série à termes positifs.

On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n^a}; \quad n\geq 1$.

On a pour tout $n\geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^a$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Par suite, d'après la règle de d'Alembert, si $0<a<1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente et si $a>1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Si $a=1$, alors $u_n = \dfrac{1}{n}$. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est une série de Riemann divergente.

2) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n^2},\ \ x\in\mathbb{R}$.

C'est une série à termes positifs à partir d'un certain rang.

On pose $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n^2}; \quad n\geq 1$.

On a pour tout $n\geq 1$,

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{-x\,\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^{-x}$. Par suite, d'après la règle de cauchy, si $x>0$ (c'est à dire $e^{-x}<1$), la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente et si $x<0$ (c'est à dire $e^{-x}>1$), la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Si $x=0$, alors $u_n = 1$. Donc, u_n ne converge pas vers 0. D'où, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

3) Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}(3+(-1)^n)^{-n}$.

C'est une série à termes positifs.

Comme $(-1)^n \geq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en particulier pour tout $n \geq 1$, on a

$$(3 + (-1)^n)^{-n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 1} (3 + (-1)^n)^{-n}$ est convergente d'après le critère de comparaison.

4) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, alors

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} e\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par la suite, utilisant le fait que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on voit que la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$ est aussi convergente d'après le critère d'équivalence.

5) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$

$$x^{\ln n} = e^{\ln n \, \ln x} = n^{\ln x} = \frac{1}{n^{-\ln x}}.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 1} x^{\ln n}$ est série de Riemann convergente si $0 < x < e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x > 1$) et est divergente si $x \geq e^{-1}$ (c'est à dire $-\ln x \leq 1$).

6) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$.

C'est une série à termes positifs.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$n^2 e^{-(\ln n)^2} = e^{2\ln n - (\ln n)^2} = e^{\ln n(2-\ln n)}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-(\ln n)^2} = 0$ et par suite d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln n)^2}$ est convergente.

7) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$.

C'est une série à termes de signes quelconques.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2} > 1$), alors $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente, c'est à dire $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

8) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$.

Comme $\frac{n}{n^2-1} \geq 0$, pour tout $n \geq 2$, alors $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est une série alternée.

On pose $u_n = \frac{n}{n^2-1}$; $,n \geq 2$. Alors, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Montrons que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \qquad \text{pour tout } x \geq 2.$$

Donc, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 2$. Par suite, $f(n+1) < f(n)$ pour tout $n \geq 2$ (car $n+1 > n$); c'est à dire $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 2$. D'où, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est convergente.

Exercice V.

1) $\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

2) $\int_2^4 \frac{3}{2x(\ln x)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_2^4 (\ln x)'(\ln x)^{-2}\,dx = \frac{-3}{2}\left[\frac{1}{\ln x}\right]_2^4 = \frac{3}{4\ln 2}$.

3) Pour calculer $\int_0^1 x \arctan x\,dx$, on fait une intégration par parties. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2}\,x$. Alors, $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Exercice VI.

1) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx$.

On effectue la décomposition en éléments simples. Pour cela, comme le polynôme x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -3 < 0$), alors il suffit de faire la division euclidienne de x^3+2x par x^2+x+1. On obtient

$$x^3+2x = (x-1)(x^2+x+1) + 2x + 1.$$

Donc

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,dx &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + cte.\end{aligned}$$

2) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx$.

On effectue la décompostion en éléments simples. Sachant que le polynôme x^2-3x-4 admet deux racines réelles, on cherche deux réels a et b tels que

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

Un simple calcul donne $a = \dfrac{-1}{5}$ et $b = \dfrac{6}{5}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx &= \frac{-1}{5}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-4}\\ &= \frac{-1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + cte.\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\displaystyle\int \frac{3x+4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}\, dx$.

Le polynôme x^2+2x+5 n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -16 < 0$).

On écrit x^2+2x+5 sous la forme canonique $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$.

On fait le changement de variable $x = 2t-1$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+4}{\left(x^2+2x+5\right)^2}\, dx = \int \frac{3x+4}{\left((x+1)^2+4\right)^2}\, dx &= \frac{1}{8}\int \frac{6t+1}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt \\ &= \frac{3}{8}\int \frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} \\ &= \frac{-3}{8(t^2+1)} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} + cte.\end{aligned}$$

Maintenant, pour calculer $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$, on calcule $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1}$ en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2+1} &= \int \frac{1}{t^2+1}\,(t)'\, dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\, dt - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + cte.$$

On remplace t par $\dfrac{x+1}{2}$, on obtient

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+5)^2}\, dx = \frac{x-11}{8(x^2+2x+5)} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + cte.$$

Exercice VII

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, (car $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ alors $x = \arcsin t$ et $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Comme $1-t^2 = (1-t)(1+t)$, on cherche deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$. Un simple calcul donne $\dfrac{1}{1-t^2}=\dfrac{1}{2(1-t)}+\dfrac{1}{2(1+t)}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1-t^2}&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{1+t}\\&=\frac{-1}{2}\Big[\ln(1-t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

On déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

2) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx$.

On remarque que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx$.

On effectue le changement de variable $t=\cos x$, alors $dt=-\sin x\,dx$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{t(1+t^2)}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

On cherche des réels $a,\ b$ et c tels que

$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Un simple calcul donne

$$\frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\sin^2(x)}\,dx&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{dt}{t}-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{t}{1+t^2}\,dt\\&=\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1-\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{2t}{1+t^2}\,dt\\&=\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1-\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\\&=-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

3) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$.

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x\left(1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$ et $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt.$$

On cherche des réels a, b et c tels que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Il est facile de trouver que

$$\frac{t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{-1}{2(1+t)} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{-1}{2}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

4) (i) On veut calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

On effectue le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors $x = 2\arctan t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\, \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)^2}\, dt \\
&= \left[\frac{-2}{t+1}\right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

(ii) Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{(d'après } (i)\text{)}.$$

Exercice VIII.

1) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [0,+\infty[$, alors

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left[e^{\arctan x}\right]_0^t = e^{\arctan t} - 1.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$.

2) Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}$. Par suite, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}$.

3) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [1,+\infty[$, alors

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^t (\ln x)' \ln x\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \frac{(\ln t)^2}{2}.$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est divergente.

4) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $t \in [2,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x-1)\Big]_2^t - \frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$.

Exercice IX.

1) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ (car $\cos x \le |\cos x| \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

On a pour tout $x \ge 1$,

$$0 \le \frac{1-\cos x}{x^2} \le \frac{|1-\cos x|}{x^2} \le \frac{1+|\cos x|}{x^2} \le \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

2) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1}\, dx,\ \ 0 < \lambda < 1$.

Soit $0 < \lambda < 1$. La fonction $x \to \dfrac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a

$$x^\lambda + x^{2-\lambda} = x^{2-\lambda}\left(1 + x^{2(\lambda-1)}\right),$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{2(\lambda-1)} = 0$ (car $0 < \lambda < 1$), alors

$$x^\lambda + x^{2-\lambda} \underset{+\infty}{\sim} x^{2-\lambda}.$$

Par la suite, utilisant de plus le fait que $x^3+1 \underset{+\infty}{\sim} x^3$, on obtient

$$\frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{2-\lambda}}{x^3} = \frac{1}{x^{\lambda+1}}.$$

Comme $\lambda + 1 > 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente. D'où, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\lambda + x^{2-\lambda}}{x^3+1}\, dx$ est une intégrale convergente d'après le critère d'équivalence.

3) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\, dx$.

La fonction $x \to \dfrac{1+\ln x}{x+2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.

On a

$$\frac{1+\ln x}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est divergente (d'après la troisième question de l'exercice VIII). D'où, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\, dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

4) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{e^x}{x}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

On a pour tout $x \in]0,1]$,

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^0}{x} = \frac{1}{x} > 0.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ est divergente d'après le critère de comparaison.

5) Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ est convergente.

6) Nature de $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$.

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1,0]$.

Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} (x+1)f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice X.

1) Soit $t \in [1,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
F(t) = \int_1^t \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx &= \int_1^t \left(\frac{-1}{x}\right)' \ln(1+x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{-\ln(1+x^2)}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x}\left(\ln(1+x^2)\right)'\,dx \\
&= \left[\frac{-\ln(1+x^2)}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x} \times \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + \int_1^t \frac{2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + 2\big[\arctan x\big]_1^t \\
&= \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + \ln 2 + 2\arctan t - 2\arctan 1.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$F(t) = \frac{-\ln(1+t^2)}{t} + 2\arctan t + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

2) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-\ln(1+t^2)}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, alors $F(t)$ est convergente quand $t \to +\infty$, ce qui veut dire que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$ est convergente. Sa valeur est

$$I = \pi + \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$