Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

CONTRÔLE OPTIMAL

Arij BOUZELMATE

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Plan du Cours

1. **Rappels d'algèbre linéaire**
2. **Contrôle optimal de systèmes linéaires**
3. **Théorie de contrôle optimal non linéaire**

1. **Problème étudié**
2. **Contrôlabilité**
3. **Temps-Optimalité**
4. **Théorie linéaire-quadratique**

Dans cette parie on s'intéresse aux systèmes de contrôle linéaires avec un coût quadratique. Ces systèmes sont d'une grande importance dans la pratique, comme on le verra par la suite. En effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un problème, par exemple lorsqu'on veut minimiser l'écart au carré par rapport à une trajectoire **nominale** (problème de poursuite). Par ailleurs même si les systèmes de contrôle sont en général non linéaires, on est très souvent amené à linéariser le système le long d'une trajectoire, par exemple dans des problèmes de stabilisation.

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

muni d'un coût quadratique du type

$$C(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T \left(x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t) \right) dt, \tag{1.2}$$

où $T > 0$ est fixé, et où, pour tout $t \in [0, T]$, $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est symétrique **définie** positive, $W(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive, et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive. On suppose que les dépendances en t de A, B, W et U sont L^∞ sur $[0, T]$. Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant, que nous appellerons problème LQ (linéaire-quadratique).
Problème LQ : Un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant fixé, l'objectif est de déterminer les trajectoires solution de (1.1) qui minimisent le coût $C(u)$.
Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final $x(T)$.
Pour toute la suite, on pose

$$\|x(t)\|_W^2 = x(t)^T W(t) x(t), \ \|u(t)\|_U^2 = u(t)^T U(t) u(t), \text{ et } g(x) = x^T Q x,$$

de sorte que

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt.$$

Les matrices Q, W, U sont des matrices de pondération.

Remarque 1.1

Par hypothèse les matrices Q *et* $W(t)$ *sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies positives. Par exemple si* $Q = 0$ *et* $W = 0$ *alors le coût est toujours minimal pour le contrôle* $u = 0$.

Remarque 1.2

Comme dans le chapitre précédent, on suppose pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. *Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle* $[t_0, T]$, *avec des contrôles dans l'espace* $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$.

Remarque 1.3

Les résultats des deux premières sections de ce chapitre seront en fait valables pour des systèmes linéaires perturbés $x' = Ax + Bu + r$*, et avec une fonction* g *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *continue et* C^1*. Nous préciserons pour chaque résultat les extensions possibles. De même nous envisagerons le cas où* $T = +\infty$*.*

Introduisons l'hypothèse suivante sur U.

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m),\ u \neq 0,\ \int_0^T \|u(t)\|_U^2\, dt > \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \tag{1.3}$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée si l'application $t \longrightarrow U(t)$ est continue sur $[0,T]$ et $T < +\infty$, et s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^m,\ v \neq 0$, on ait

$$v^T U(t) v > c v^T v.$$

On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 1.1 (Existence)

Sous l'hypothèse (1.3), il existe une unique trajectoire minimisante pour le problème LQ.

Démonstration

Montrons tout d'abord l'existence d'une telle trajectoire. Considérons une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de contrôles sur $[0, T]$, (càd $C(u_n)$ est décroissante et minorée par 0), donc la suite $C(u_n)$ converge vers la borne inférieure des coûts. En particulier cette suite est bornée. Or par hypothèse, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ on ait $C(u) > \alpha \|u\|_{L^2}^2$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Par conséquent à sous-suite près elle converge faiblement vers un contrôle u de $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. Notons x_n (resp. x) la trajectoire associée au contrôle u_n (resp. u) sur $[0, T]$.

D'après la formule de variation de la constante, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$x_n(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_n(s) ds. \tag{1.4}$$

On montre alors aisément que, à sous-suite près, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application x sur $[0, T]$ (en fait on peut même montrer que la convergence est uniforme, il suffit d'utiliser l'équation $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ et le fait que l'injection de H^1 dans C^0 est compacte).
Passant maintenant à la limite dans (1.4), on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds,$$

et donc x est une solution du système associée au contrôle u.

Existence de trajectoires optimales

Montrons qu'elle est minimisante. Pour cela on utilise le fait que puisque $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2, on a l'inégalité

$$\int_0^T \|u(t)\|_U^2 \, dt \leq \liminf \int_0^T \|u_n(t)\|_U^2 \, dt,$$

et donc $C(u) \leq \liminf C(u_n)$. Mais comme (u_n) est une suite minimisante, $C(u)$ est égal à la borne inférieure des coûts, càd le contrôle u est minimisant, ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale.

Pour l'unicité on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1

La fonction C est strictement convexe.

Démonstration

Tout d'abord remarquons que pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $f(u) = u^T U(t) u$ définie sur $\mathbb{R}^m$ est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice $U(t)$ est symétrique définie positive. ($\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ 2|x^T U y| < x^T U x + y^T U y$ pour $x \neq y$).
Ensuite, notons $x_u(\cdot)$ la trajectoire associée à un contrôle u. On a pour tout $t \in [0, T]$,

$$x_u(t) = M(t)x_0 + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Démonstration (suite)

Par conséquent, comme dans la preuve du premier théorème du chapitre de contrôlabilité l'application qui à un contrôle u associe $x_u(t)$ est convexe (car elle est linéaire en u), ceci pour tout $t \in [0, T]$. La matrice $W(t)$ étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle u associe $x(t)^T W(t) x(t)$. On raisonne de la même facon pour le terme $x(T)^T Q x(T)$. Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en u. $\square$

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement. $\square$

Remarque 1.4 (Extension du théorème 1.1)

Si la fonction g, apparaissant dans le coût, est une fonction continue quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, bornée inférieurement ou convexe, et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai.

Remarque 1.5 (Cas d'un intervalle infini)

Le théorème est encore valable si $T = +\infty$, *avec* $g = 0$, *pourvu que le système (1.1) soit contrôlable (en temps quelconque).*
En effet il suffit juste de montrer qu'il existe des trajectoires solutions du système (1.1) sur $[0, +\infty[$ *et de coût fini. Or si le système est contrôlable, alors il existe un contrôle* u *et un temps* $T > 0$ *tel que la trajectoire associée à* u *relie* x_0 *à* 0 *sur* $[0, T]$. *On prolonge alors le contrôle* u *par* 0 *sur* $]T, +\infty[$, *de sorte que la trajectoire reste en* 0. *On a ainsi construit une trajectoire solution du système sur* $[0, +\infty[$ *et de coût fini. Ceci permet d'affirmer l'existence d'une suite de contrôles minimisants. Les autres arguments de la preuve sont inchangés. On obtient donc le résultat suivant.*

Existence de trajectoires optimales

Proposition 1.1

Considérons le problème de déterminer une trajectoire solution de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

sur $[0, +\infty[$ *et minimisant le coût*

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt.$$

Si le système est contrôlable en un temps $T > 0$*, et si l'hypothèse (1.3) est vérifiée sur* $[0, +\infty[$*, alors il existe une unique trajectoire minimisante.*

Remarque 1.6

• *Si l'on suppose de plus que les applications* $A(\cdot)$ *et* $B(\cdot)$ *sont* L^2 *sur* $[0, +\infty[$, *et si* $W(\cdot)$ *vérifie comme* U *une hypothèse de cœrcivité (1.3), alors la trajectoire minimisante tend vers* 0 *lorsque* t *tend vers l'infini.*
En effet, on montre facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $x'(\cdot)$ *est dans* L^1, *et par conséquent que* $x(t)$ *converge. Sa limite est alors forcément nulle.*
• *Dans le cas autonome (*A *et* B *sont constantes), si* $W(\cdot)$ *vérifie comme* U *une hypothèse de coercivité (1.3), alors la trajectoire minimisante tend vers* 0 *lorsque* t *tend vers l'infini.*
En effet, il suffit d'écrire l'inégalité

$$\|x'(t)\| \leq \|A\| \, \|x(t)\| + \|B\| \, \|u(t)\| \leq Cste(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2),$$

puis en intégrant on montre de même que l'application $x'(\cdot)$ *est dans* L^1.

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Théorème 1.2 (caractérisation, principe de Pontryagin)

La trajectoire x, associée au contrôle u, est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant pour presque tout $t \in [0, T]$

$$p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \tag{1.5}$$

et la condition finale

$$p(T) = -x(T)^T Q. \tag{1.6}$$

De plus le contrôle optimal u s'écrit, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) = U(t)^{-1}.B(t)^T.p(t)^T. \tag{1.7}$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration

Soit u un contrôle optimal et x la trajectoire associée sur $[0, T]$. Le coût est donc minimal parmi toutes les trajectoires solutions du système, partant de x_0, le point final étant non fixé. Considérons alors des perturbations du contrôle u dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ du type

$$u_{pert}(t) = u(t) + \delta u(t),$$

engendrant les trajectoires

$$x_{pert}(t) = x(t) + \delta x(t),$$

avec $\delta x(0) = 0$. La trajectoire x_{pert} deverait être solution du système

$$x'_{pert} = Ax_{pert} + Bu_{pert}.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

On en déduit que

$$\delta x' = A\delta x + B\delta u,$$

et par conséquent, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\delta x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds. \tag{1.8}$$

Par ailleurs il est bien clair que le coût $C(\cdot)$ est une fonction lisse sur $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ (elle est même analytique) au sens de Fréchet. Le contrôle u étant minimisant, on doit avoir

$$dC(u) = 0.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

Or

$$C(u_{pert}) = g(x_{pert}(T)) + \int_0^T (\|x_{pert}(t)\|_W^2 + \|u_{pert}(t)\|_U^2)dt,$$

et comme Q, $W(t)$ et $U(t)$ sont symétriques, on en déduit que

$$\frac{1}{2}dC(u).\delta u = x(T)^T Q\delta x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t)\delta x(t) + u(t)^T U(t)\delta u(t))dt = 0, \tag{1.9}$$

ceci étant valable pour toute perturbation δu. Cette équation va nous conduire à l'expression du contrôle optimal u. Mais introduisons tout d'abord le vecteur adjoint $p(t)$ comme solution du problème de Cauchy

$$p'(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t), \quad p(T) = -x(T)^T Q.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

La formule de variation de la constante nous conduit à

$$p(t) = \Lambda M(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds \, M(t)^{-1}$$

pour tout $t \in [0, T]$, où Λ est déterminé par la condition aux limites via la formule :

$$\Lambda = -x(T)^T Q M(T) - \int_0^T x(s)^T W(s) M(s) ds.$$

Revenons alors à l'équation (1.9) et transformons le terme du milieu de second membre

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

$$\int_0^T (x(t)^T W(t)\delta x(t) = \int_0^T x(t)^T W(t) M(t) (\int_0^t M(s)^{-1} B(s)\delta u(s) ds) dt$$

$$= \int_0^T x(t)^T W(t) M(t) dt \int_0^T M(s)^{-1} B(s)\delta u(s) ds -$$

$$\int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds M(t)^{-1} B(t)\delta u(t) dt$$

$$= \left(-x(T)^T Q M(T) - \Lambda\right) \int_0^T M(s)^{-1} B(s)\delta u(s) ds -$$

$$\int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds M(t)^{-1} B(t)\delta u(t) dt$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

$$= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds - \int_0^T \Lambda M(t)^{-1} B(t) \delta u(t) dt -$$

$$\int_0^T \int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds M(t)^{-1} B(t) \delta u(t) dt$$

$$= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds - \int_0^T \Lambda M(t)^{-1} B(t) \delta u(t) dt -$$

$$\int_0^T \left[\int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds \right] M(t)^{-1} B(t) \delta u(t) dt$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

$$= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds -$$

$$\int_0^T \left[\Lambda M(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^T W(s) M(s) ds M(t)^{-1} \right] B(t) \delta u(t) dt$$

$$= -x(T)^T QM(T) \int_0^T M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds - \int_0^T p(t) B(t) \delta u(t) dt.$$

Or

$$\delta x(t) = M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

Donc

$$x(T)^T Q\delta x(T) = x(T)^T QM(T)\int_0^T M(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds$$

ce qui donne

$$\int_0^T x(t)^T W(t)\delta x(t) = -x(T)^T Q\delta x(T) - \int_0^T p(t)B(t)\delta u(t)dt.$$

Donc (1.9) s'écrit

$$\frac{1}{2}dC(u).\delta u = x(T)^T Q\delta x(T) - x(T)^T Q\delta x(T) - \int_0^T p(t)B(t)\delta u(t)dt + \int_0^T u(t)^T U(t)\delta u(t))dt = 0.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Démonstration (suite)

On trouve alors

$$\frac{1}{2} dC(u).\delta u = \int_0^T \left[u(t)^T U(t) - p(t)B(t) \right] \delta u(t))dt = 0.$$

Ceci pour toute application $\delta u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ ce qui implique l'égalité pour presque tout $t \in [0,T]$

$$u(t)^T U(t) - p(t)B(t) = 0$$

et en fin on a

$$u(t) = U(t)^{-1} B^T p(t)^T.$$

Ce qui est la conclusion souhaitée.

Démonstration (suite)

Réciproquement : S'il existe un vecteur adjoint $p(t)$ vérifiant (1.5) et (1.6) et si le contrôle u est donné par (1.7), alors il est bien clair d'après le raisonnement précédent que

$$dC(u) = 0.$$

Or C étant strictement convexe ceci implique que u est un minimum global de C. $\square$

Remarque 1.7

Si le système de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$, alors le théorème précédent reste vrai. Il le reste, de même, si la fonction g apparaissant dans le coût est une fonction convexe C^1 quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sauf que la condition finale sur le vecteur adjoint (1.6) devient

$$p(T) = -\frac{1}{2}\nabla g(x(T)), \tag{1.10}$$

comme on le voit facilement dans la démonstration (en l'absence de convexité, la condition nécessaire reste vraie). Cette condition s'appelle condition de transversalité.

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Remarque 1.8

Dans le cas d'un intervalle infini $(T = +\infty)$ *la condition devient*

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 0. \tag{1.11}$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Définition

On appelle Hamiltonien, la fonction $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x,p,u) = p.(Ax+Bu) - \frac{1}{2}(x^TWx + u^TUu),$$

en utilisant toujours la convention que p est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^n$. Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu$$
$$p' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -pA + x^TW$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

puisque $pB - u^TU = 0$. Ceci annonce le principe du maximum général.

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas *LQ*

Remarque 1.9

Dans le cas LQ on a d'une part le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati (voir la section suivante).

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Exemple 1. Considérons, avec $n = m = 1$, le système de contrôle

$$x' = u, \, x(0) = x_0,$$

et le coût

$$C(u) = \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2) dt.$$

Les données du problème $A = 0, \; B = 1, \; Q = 0, \; W = 1$ et $U = 1$.
On cherche le vecteur adjoint qui est solution de

$$p' = -pA + x^T W = x^T \quad \text{et} \quad p(T) = 0$$

mais

$$u(t) = U^{-1} B^T p^T = p.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Si la trajectoire x associée au contrôle u est optimale alors d'après le théorème précédent on doit avoir

$$x' = u = p \Rightarrow x'' = p'^{T} = x.$$

On en déduit alors

$$x(t) = \alpha ch(t) + \beta sh(t), \quad p(t) = x'(t) = \alpha sh(t) + \beta ch(t).$$

On détermine α et β par les conditions

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \alpha = x_0$$
$$p(T) = 0 \Rightarrow \beta = -x_0 \frac{sh(T)}{ch(T)}.$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas *LQ*

d'où l'on a :

$$x(t) = x_0 \left(ch(t) - \frac{sh(T)}{ch(T)} sh(t) \right),$$
$$p(t) = x_0 \left(sh(t) - \frac{sh(T)}{ch(T)} ch(t) \right).$$

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité : Principe du maximum dans le cas LQ

Exemple 2. Considérons le problème du véhicule se déplaçant en ligne droite, modélisé par le système de contrôle

$$x'' = u, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

On souhaite, pendant un temps T fixé, maximiser la distance parcourue tout en minimisant l'énergie fournie.
On choisit donc le critère

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T u(t)^2 dt.$$

En appliquant le théorème 1.2 on obtient les équations

$$\begin{gathered} x' = y, \;\; y' = u, \\ p_1' = 0, \quad p_2' = -p_1, \end{gathered}$$

et la condition (1.10) donne

$$p_1(T) = \frac{1}{2}, \quad p_2(T) = 0.$$

En intégrant on trouve le contrôle

$$u(t) = \frac{T - t}{2}$$

et la distance parcourue

$$x(T) = \frac{1}{6} T^3.$$

Soit $T > 0$ fixé, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.12}$$

minimisant le coût quadratique

$$C_T(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T \left(\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2 \right) dt. \tag{1.13}$$

Définition 1.1

La fonction valeur S_T au point x_0 est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit

$$S_T(x_0) = inf\{C_T(u) \mid x_u(0) = x_0\}.$$

Remarque 1.10

Sous l'hypothèse (1.3) et d'après le théorème 1.1, on a l'existence d'une unique trajectoire optimale, dans ce cas cette borne inférieure est un minimum.

Théorème 1.3

Sous l'hypothèse (1.3), pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique trajectoire optimale x associée au contrôle u pour le problème (1.12), (1.13). Le contrôle optimal se met sous forme

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)x(t), \tag{1.14}$$

où $E(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation matricielle de Riccati

$$E'(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t),\ E(T) = -Q. \tag{1.15}$$

De plus, pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $E(t)$ est symétrique, et

$$S_T(x_0) = -x_0^T E(0)x_0. \tag{1.16}$$

Remarque 1.11

En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal u se met sous forme

$$u(t) = K(t)x(t),$$

où $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$. *Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation.*

Démonstration

D'après les théorèmes 1.1 et 1.2, il existe une unique trajectoire optimale qui est caractérisée par le système d'équations

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \\ p' &= -pA + x^T W, \end{aligned}$$

avec $x(0) = x_0$ et $p(T) = -x(T)^T Q$.
Puisque le contrôle s'écrit $u = U^{-1}B^T p^T$, il suffit de montrer que l'on peut écrire $p(t) = x(t)^T E(t)$, où $E(t)$ est solution de (1.15).
On doit montrer deux conditions

1. Si p s'écrit $p(t) = x(t)^T E(t)$, alors $E(t)$ est solution de (1.15).
2. Si $E(t)$ est solution de (1.15). On montre qu'on a effectivement $p = x(t)^T E(t)$.

Démonstration (suite)

Démontrons 1. Pour cela, on suppose $p(t) = x(t)^T E(t)$, on porte dans les équations vérifiées par $x(t)$ et $p(t)$

$$x' = Ax + BU^{-1}B^T p^T = \left(A + BU^{-1}B^T E^T\right) x(t), \text{ et } \quad x(0) = x_0$$

$$\begin{aligned} p' &= \left(x(t)^T\right)' E(t) + x(t)^T E(t)' = \left[\left(A + BU^{-1}B^T E^T\right) x(t)\right]^T E(t) + x(t)^T E(t)' \\ &= x(t)^T A(t)^T E(t) + x(t)^T EBU^{-1}B^T E(t) + x(t)^T E(t)' \end{aligned}$$

$$p' = -pA + x^T W = -x(t)^T E(t) A(t) + x^T W, \; p(T) = -x(T)^T Q.$$

On déduit

$$\begin{aligned} & -x(t)^T E(t) A(t) + x^T(t) W = x^T(t) A(t)^T E(t) + x(t)^T EBU^{-1}B^T E(t) + x(t)^T E(\\ & \Leftrightarrow x(t)^T \left[W - E(t)A(t) - A(t)^T E(t) - EBU^{-1}B^T E(t)\right] = x(t)^T E(t)'. \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

$x(t)$ étant une solution non triviale, on déduit donc que E vérifie l'équation (1.15).
De la condition $p(T) = x(T)^T E(T) = -x(t)^T Q$, on déduit $E(T) = -Q$.

Démontrons 2. Soit $E(t)$ solution de (1.15). En utilisant l'unicité de la trajectoire optimale, on va maintenant montrer que p s'écrit effectivement sous la forme $p(t) = x(t)^T E(t)$.
Tout d'abord $E(t)$ est symétrique car Q et W sont symétriques, et $E(t)^T$ vérifie le même problème que $E(t)$, donc d'après l'unicité on a $E^T(t) = E(t)$. A priori on ne sait pas cependant que la solution est bien définie sur $[0, T]$ tout entier. On montrera cela plus loin (lemme 1.2).

Démonstration (suite)

Posons maintenant $p_1(t) = x_1(t)^T E(t)$, où x_1 est solution de

$$x_1' = Ax_1 + Bu_1, \;\; x_1(0) = x_0$$

et

$$u_1 = U^{-1} B^T E^T x_1.$$

On a alors

$$p_1' = \left(x_1^T\right)' E + x_1^T E' =$$
$$(Ax_1 + BU^{-1}B^T E x_1)^T E + x_1^T (W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E) = -p_1 A + x_1^T W.$$

Démonstration (suite)

On alors (x_1, p_1, u_1) vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = Ax_1 + Bu_1, \;\; x_1(0) = x_0. \\ p_1' = -p_1 A + x_1^T W, \;\;\; p_1(T) = -x_1^T Q. \\ u_1 = U^{-1} B^T E^T x_1 = U^{-1} B^T p_1^T \end{array}\right.$$

Ce triplet (x_1, p_1, u_1) vérifie exactement les équations du théorème 1.2. Par conséquent la trajectoire x_1 est optimale, et par unicité, il vient $x_1 = x$, $u_1 = u$, puis $p_1 = p$. En particulier on a donc $p = x^T E$, et $u = U^{-1} B^T E^T x$.

Démonstration (suite)

Déduisons-en la formule (1.16). Pour cela calculons d'abord, le long de la trajectoire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(x(t)^T E(t)x(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left[p(t)x(t)\right] = p'(t)x(t) + p(t)x'(t)\\ &= (-p(t)A(t) + x(t)^T W(t))x(t) + p(t)(A(t)x(t) + B(t)u(t\\ &= x(t)^T W(t)x(t) + p(t)B(t)u(t).\end{aligned}$$

Par ailleurs de l'expression de u on déduit

$$u^T Uu = (U^{-1}B^T E^T x)^T U\left(U^{-1}B^T E^T x\right) = x^T EBU^{-1}B^T E^T x = pBu.$$

Finalement on a l'égalité

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)^T E(t)x(t)\right) = x(t)^T W(t)x(t) + u^T(t)Uu(t).$$

Démonstration (suite)

Or $u = U^{-1}B^TE^Tx$ est le contrôle réalisant le minimum de $C(u)$, par conséquent

$$S_T(x_0) = C(u) = x(T)^TQx(T) + \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(x(t)^TE(t)x(t)\Big)\,dt$$

et puisque $E(T) = -Q$ et $x(0) = x_0$, il vient $S_T(x_0) = -x_0^TE(0)x_0$.

Lemme 1.2

L'application $t \longrightarrow E(t)$ est bien définie sur $[0, T]$ tout entier.

Démonstration

On sait que $E(t)$ vérifie le problème

$$E'(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t),$$
$$E(T) = -Q.$$

Si l'application $E(t)$ n'est pas définie sur $[0, T]$ entier, alors il existe $0 < t_* < T$ tel que $\|E(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_* par valeurs supérieures, c'est à dire $\lim\limits_{t \to t^{*+}} ||E(t)|| = +\infty$. En particulier pour tout $\alpha > 0$ il existe $t_0 \in]t_*, T]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x_0\| = 1$, tels que

$$|x_0^T E(t_0) x_0| > \alpha. \tag{1.17}$$

Démonstration (suite)

D'après les théorèmes 1.1 et 1.2 , il existe une unique trajectoire optimale $x(\cdot)$ pour le problème LQ sur $[t_0, T]$, telle que $x(t_0) = x_0$. Cette trajectoire est caractérisée par le système d'équations

$$x' = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \quad x(t_0) = x_0,$$
$$p' = -pA + x^T W, \quad p(T) = -x(T)^T Q.$$

Le raisonnement précédent, en remplaçant l'intervalle $[0, T]$ par l'intervalle $[t_0, T]$, montre que $S_{T-t_0}(x_0, u) = -x_0^T E(t_0) x_0$. Par ailleurs, $S_{T-t_0}(x_0, u)$ est inférieur au coût de la trajectoire solution du système, partant de x_0, associée au contrôle nul sur l'intervalle $[t_0, T]$, c'est à dire $S_{T-t_0}(x_0, u) \leq S_{T-t_0}(x_0, 0)$.

Démonstration (suite)

Or il est facile de voir que ce coût est majoré par une constante multiplicative $D > 0$ par $\|x_0\|^2$.

$$S_{T-t_0}(x_0, u) \leq S_{T-t_0}(x_0, 0) = x(T)^T Q x(T) + \int_{t_0}^{T} \|x(t)\|_W^2 \, dt \leq D \|x_0\|^2,$$

car $x(t)$ est borné et x_0 est non nul.
On en déduit donc que $|x_0^T E(t_0) x_0| \leq D \|x_0\|^2$, ce qui contredit (1.17). $\square$

Ceci achève la preuve du théorème 1.3. $\square$