

CONTRÔLE OPTIMAL

Arij BOUZELMATE

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

- ① Rappels d'algèbre linéaire
- ② Contrôle optimal de systèmes linéaires
- ③ Théorie de contrôle optimal non linéaire

Contrôle optimal de systèmes linéaires

- ① Problème étudié
- ② Contrôlabilité
- ③ Temps-Optimalité
- ④ Théorie linéaire-quadratique

Temps-optimalité

Existence de trajectoires temps-optimales

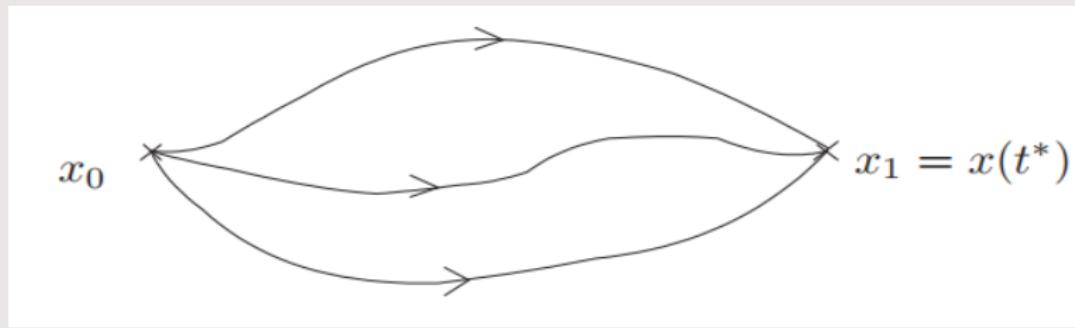
Il faut tout d'abord formaliser, à l'aide de $Acc(x_0, t)$, la notion de temps minimal. Considérons comme précédemment le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) + r(t),$$

où les contrôles u sont à valeurs dans un compact d'intérieur non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient x_0 et x_1 deux points de \mathbb{R}^n . Supposons que x_1 soit accessible depuis x_0 , c'est-à-dire qu'il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_1 . Parmi toutes les trajectoires reliant x_0 à x_1 , on aimerait caractériser celles qui le font en temps minimal t^* .

Temps-optimalité

Existence de trajectoires temps-optimales



Existence de trajectoires temps-optimales

Théorème 1.1 (Existence)

Si le point x_1 est accessible depuis x_0 , alors il existe une trajectoire temps-minimale reliant x_0 à x_1 .

Démonstration

Si t^* est le temps minimal, alors pour tout $t < t^*$, $x_1 \notin \text{Acc}(x_0, t)$ (en effet sinon, x_1 serait accessible à partir de x_0 en un temps inférieur à t^*). Par conséquent on a $t^* = \inf\{t \geq 0 \mid x_1 \in \text{Acc}(x_0, t)\}$.

Ce temps t^* est bien défini puisque $\text{Acc}(x_0, t)$ varie continûment avec t , donc l'ensemble $\{t \geq 0 \mid x_1 \in \text{Acc}(x_0, t)\} = F(t)$ est fermé dans \mathbb{R} (car l'application $\varphi : t \longrightarrow \text{Acc}(x_0, t)$ est continue, $F = \varphi^{-1}(E)$ où $E = \bigcup_{\substack{t \in [0, T] \\ x_1 \in \text{Acc}(x_0, t)}} \text{Acc}(x_0, t)$ est fermé). Donc cette borne inférieure est atteinte.

Existence de trajectoires temps-optimales

Démonstration (suite)

Le temps $t = t^*$ est le premier temps pour lequel $Acc(x_0, t)$ contient x_1 .
De plus, on a nécessairement

$$x_1 \in \partial Acc(x_0, t^*) = Acc(x_0, t^*) \setminus \overset{\circ}{Acc(x_0, t^*)}.$$

En effet, si x_1 appartenait à l'intérieur de $Acc(x_0, t^*)$ alors pour $t < t^*$ proche de t^* , x_1 appartiendrait encore à $Acc(x_0, t)$ car $Acc(x_0, t)$ varie continûment avec t . Mais ceci contredit le fait que t^* soit le temps minimal. \square

Existence de trajectoires temps-optimales

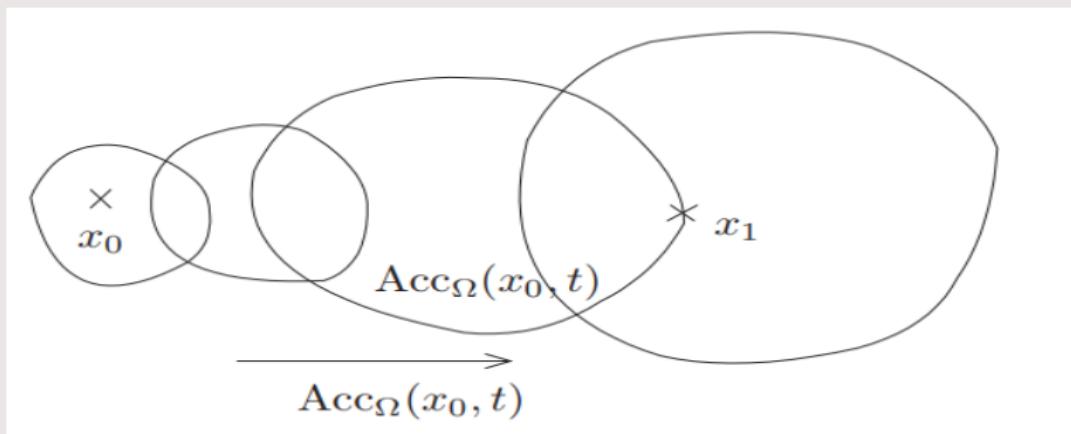


FIGURE: Temps minimal

Existence de trajectoires temps-optimales

Remarque 1.1

*On peut aussi se poser le problème d'atteindre une cible non réduite à un point. Ainsi, soit $(M_1(t))_{0 \leq t \leq T}$ une famille de sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^n variant continûment en t . Tout comme précédemment, on voit que **s'il existe** un contrôle u à valeurs dans Ω joignant x_0 à $M_1(T)$, alors il existe un contrôle temps-minimal défini sur $[0, t^*]$ joignant x_0 à $M_1(t^*)$.*

Ces remarques donnent une vision géométrique de la notion de temps minimal, et conduisent à la définition suivante.

Existence de trajectoires temps-optimales

Définition 1.1

*Le contrôle u est dit **extrémal** sur $[0, t]$ si la trajectoire du système associée à u*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

vérifie $x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t)$.

En particulier, tout contrôle temps-minimal est extrémal. La réciproque est évidemment fausse car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.

Dans le paragraphe suivant on donne une caractérisation de cette propriété.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Théorème 1.2

Considérons le système de contrôle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

où le domaine des contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$ de l'équation $p'(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v \quad (1.1)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint ou état adjoint.

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Remarque 1.2

La condition initiale $p(0)$ dépend en fait du point final x_1 , comme on le verra dans la démonstration. Puisqu'elle n'est pas directement connue, l'usage de ce théorème sera plutôt indirect, on le verra dans les exemples.

Remarque 1.3

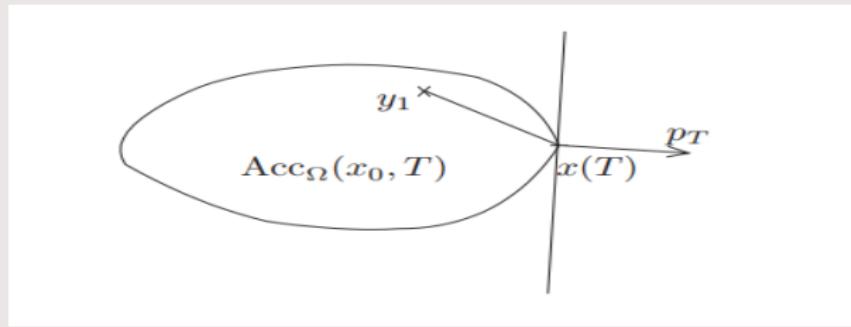
Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $\Omega = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation $p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in [-a, a]} p(t)B(t)v$, implique immédiatement que $u(t) = a.\text{signe}(p(t)B(t)) = (\pm a)$. La fonction $\varphi(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ .

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (Du Théorème 1.2)

On a vu que $Acc_{\Omega}(x_0, T) = Acc_{Conv(\Omega)}(x_0, T)$, et par conséquent on peut supposer que Ω est convexe.

(\Rightarrow) On suppose que u est extrémal sur $[0, T]$, et soit x la trajectoire associée à u . On a $x(T) \in \partial Acc(x_0, T)$. Par convexité de $Acc(x_0, T)$, il existe un hyperplan tangent à $Acc(x_0, T)$ au point $x(T)$. Soit p_T un vecteur normal à cet hyperplan.



Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

D'après le théorème du convexe,

$$\forall y_1 \in Acc(x_0, T) \quad p_T(y_1 - x(T)) \leq 0. \quad (1.2)$$

Par définition de $Acc(x_0, T)$, il existe un contrôle u_1 tel que la trajectoire associée $y(t)$ vérifie $y_1 = y(T)$. L'inégalité (1.2) se réécrit

$$p_T x(T) \geq p_T y(T).$$

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

D'où

$$\begin{aligned} p_T x(T) &= \int_0^T p_T M(T) M(s)^{-1} (B(s)u(s) + r(s)) ds \\ &\geq \int_0^T p_T M(T) M(s)^{-1} (B(s)u_1(s) + r(s)) ds = p_T y(T). \\ \Leftrightarrow \int_0^T p_T M(T) M(s)^{-1} B(s)u(s) ds &\geq \int_0^T p_T M(T) M(s)^{-1} B(s)u_1(s) ds. \end{aligned}$$

Appelons $p(t)$ la solution sur $[0, T]$ de $p' = -pA$, telle que $p(T) = p_T$.
Alors il est clair que

$$p(t) = p(0)M(t)^{-1} \text{ et } p_T = p(T) = p(0)M(T)^{-1}.$$

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

Il s'ensuit que

$$p_T M(T) = p(0)$$
$$\Rightarrow \forall s \in [0, T], \quad p_T M(T) M(s)^{-1} = p(0) M(s)^{-1} = p(s),$$

et donc

$$\int_0^T p(s) B(s) u_1(s) ds \leq \int_0^T p(s) B(s) u(s) ds \quad (1.3)$$

(y est quelconque donc u_1 est quelconque \Rightarrow le résultat $p(s)B(s)u(s) = \max_{v \in \Omega} p(s)B(s)v$).

Par conséquent (1.1) est vraie.

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

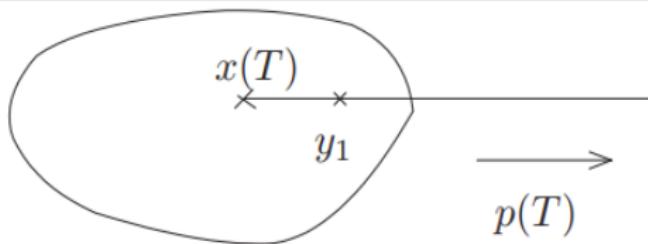
Démonstration (suite)

(\Leftarrow) **Réciprocement**, supposons qu'il existe un vecteur adjoint tel que le contrôle u vérifie (1.1). Notons $x(\cdot)$ la trajectoire associée à u . On voit facilement en **remontant** le raisonnement précédent que

$$\forall y_1 \in Acc(x_0, T) \quad p(T)(y_1 - x(T)) \leq 0. \quad (1.4)$$

Raisonnons alors par l'absurde, et supposons que $x(T) \in IntAcc(x_0, T)$. Alors il existerait un point y_1 de $Acc(x_0, T)$ qui serait sur la demi-droite d'origine $x(T)$ et de direction $p(T)$. Mais alors $p(T)(y_1 - x(T)) > 0$, ce qui contredirait (1.4). Donc $x(T) \in \partial Acc(x_0, T)$, et u est extrémal. \square

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire



Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Remarque 1.4

*Si u est extrémal sur $[0, T]$ alors u est aussi extrémal sur $[0, t]$ pour tout $t \in [0, T]$, et de plus $p(t)$ est un vecteur normal extérieur à $Acc(x_0, t)$. c'est à dire si x est une trajectoire associée à u tel que $x(T) \in \partial Acc(x_0, T)$ alors pour tout $t \in [0, T]$ on a $x(t) \in \partial A(cc(x_0, t)$ et $p(t)$ est perpendiculaire au plan tangent à $Acc(x_0, t)$ au point $x(t)$, cette condition $p(t) \perp$ plan tangent à $Acc(x_0, t)$ en $x(t)$ est appelée principe de **transversalité**.*

Cette remarque découle facilement de la preuve et de la propriété (1.1).

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Remarque 1.5

Puisque tout contrôle temps-minimal est extrémal, le théorème précédent, qui est le principe du maximum dans le cas linéaire, donne une condition nécessaire d'optimalité.

Remarque 1.6

Si u est un contrôle temps-minimal joignant en temps T une cible M_1 , où $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors on peut de plus choisir le vecteur adjoint pour que le vecteur $p(T)$ soit unitaire et normal à un hyperplan séparant (au sens large) $\text{Acc}(x_0, T)$ et M_1 . C'est une condition dite de transversalité, obtenue facilement dans la preuve précédente.

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Comme exemple théorique d'application, montrons le résultat suivant.

Proposition 1.1

Considérons dans \mathbb{R}^n le système linéaire autonome ($m = 1$)

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec $B \in \mathbb{R}^n$ et $|u(t)| \leq 1$, (c'est à dire $\Omega = [-1, 1]$) et la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman.

1. Si toutes les valeurs propres de A sont réelles, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur \mathbb{R}^+ .
2. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur \mathbb{R}^+ .

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Remarque 1.7

Les points de commutation sont les zéros de la fonction $p(t)B(t)$ où p est l'état adjoint qui est solution de $p' = -pA$.

Démonstration

D'après le théorème de la forme de Brunovski, le système peut s'écrire sous la forme,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

et il est alors équivalent à une équation différentielle scalaire d'ordre n de la forme

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n = u(t), \quad |u| \leq 1.$$

Soit p le vecteur adjoint, solution du système $p'(t) = -p(t)A(t)$ et $\lambda(t)$ la dernière coordonnée du p , alors $\lambda(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\lambda^{(n)} - a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + (-1)^n a_n \lambda = 0.$$

Question : Comment résoudre cette dernière équation linéaire ?

Quelle relation y a t-il entre les racines de l'équation caractéristique et les valeurs propres de A .

$$p(t)Bu(t) = \lambda(t)u(t) = \max_{v \in \mathbb{R}^n, |v| \leq 1} p(t)Bv.$$

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

On déduit que tout contrôle extrémal est de la forme $u(t) = \text{sign} \epsilon \lambda(t)$.
De plus on a $\lambda(t)$ est de la forme :

1. Si toutes les valeurs propres $(\mu_j)_{1 \leq j \leq r}$ de A sont réelles, alors $\lambda(t)$ s'écrit sous la forme

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) \exp(\mu_j t)$$

où P_j est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_j - 1$, et où μ_1, \dots, μ_r , sont les r valeurs propres distinctes de $-A$, de multiplicités respectives n_1, \dots, n_r , (équations différentielles linéaires).

Notons que $n = n_1 + \dots + n_r$. On montre alors facilement, par récurrence, que $\lambda(t)$ admet au plus $n - 1$ zéros.

Condition nécessaire d'optimalité : Principe du maximum dans le cas linéaire

Démonstration (suite)

2. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie imaginaire non nulle, alors comme précédemment, on peut écrire

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^r (P_j(t) \cos \beta_j t + Q_j(t) \sin \beta_j t) \exp(\alpha_j t)$$

où $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ et P_j, Q_j sont des polynômes réels non nuls. En mettant en facteur un terme $t^k \exp \alpha_i t$ de plus haut degré (c'est à dire dominant), on voit facilement que $\lambda(t)$ a un nombre infini de zéros. \square

Synthèse Optimale pour le problème de l'oscillateur harmonique linéaire

Appliquons la théorie précédente à l'exemple de l'oscillateur harmonique.

On considère l'équation du mouvement suivante

$$mx''(t) = -k_1(x(t) - l) + u(t).$$

et on impose la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Répondons aux deux questions suivantes :

1. Pour toute condition initiale $x(0) = x_0, x'(0) = y_0$, existe-t-il une force extérieure horizontale $u(t)$ (un contrôle) vérifiant la contrainte $|u(t)| \leq 1$, qui permette d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre $x(T) = 0, x'(T) = 0$ en un temps fini T ?
2. Si la première condition est remplie, peut-on de plus déterminer cette force de manière à minimiser le temps ?

Contrôlabilité du système

Pour simplifier on suppose $m = k_1 = 1$, $l = 0$, (ce qui peut se faire en effectuant des changements de variables et de fonctions).

On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $y(t) = x'(t)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + Bu \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

On a facilement $rg(B, AB) = 2$, par ailleurs les valeurs propres de A sont de partie réelle nulle. Donc, le système est contrôlable à 0, c'est à dire, il existe des contrôles u vérifiant la contrainte $|u| \leq 1$ tels que les trajectoires associées relient X_0 à 0, ce qui répond à la première question.

Interprétation physique

- Si on n'applique aucune force extérieure, i.e. $u = 0$, alors l'équation du mouvement est $x''(t) + x(t) = 0$ et dont la solution est $x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$. Donc la masse ponctuelle oscille, et ne s'arrête jamais, elle ne parvient pas à sa position d'équilibre.
- Si l'on applique certaines forces extérieures, afin d'amortir les oscillations, la théorie prévoit qu'on parvient à stopper l'objet en un temps fini.

Calcul du contrôle optimal

D'après le paragraphe précédent, il existe des contrôles permettant de relier X_0 à 0. On cherche maintenant à le faire en **temps minimal**. Pour cela, on applique le théorème 1.2, selon lequel le contrôle optimal est donné par l'expression $u(t) = \text{signe}(p(t)B)$, où $p(t) = (p_1(t), p_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ est solution de $p'(t) = -p(t)A$.

$$\Rightarrow p'_1 = p_2, \quad p'_2 = -p_1, \quad \text{d'où } p''_2 + p_2 = 0.$$

Donc

$$p_2(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) = w \cos(t + r).$$

et

$$p_1(t) = \lambda \sin(t) - \mu \cos(t) = w \sin(t + r)$$

Finalement on a $u(t) = \text{signe}(p(t)B) = \text{signe}(p_2(t))$.

Calcul du contrôle optimal

On voit bien que suivant la valeur de t le contrôle $u(t)$ change de signe. En particulier, la durée entre deux zéros consécutifs de $p_2(t)$ est exactement π . Par conséquent le contrôle optimal est constant par morceaux sur des intervalles de longueur π , et prend alternativement les valeurs ± 1 .

- Si $u = -1$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

- Si $u = +1$, on a

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

La trajectoire optimale finale, reliant X_0 à 0, sera constituée d'arcs successifs, solutions de (1.5) et (1.6).

Représentation graphique

Solutions de (1.5). On obtient facilement $(x + 1)^2 + y^2 = \text{cste} = r^2$, donc les courbes solutions de (1.5) sont des cercles centrés en $(-1, 0)$, et de période 2π .

Solutions de (1.6). On obtient facilement $(x - 1)^2 + y^2 = \text{cste} = r^2$. Les solutions sont des cercles centrés en $(1, 0)$, de période 2π .

La trajectoire optimale de X_0 à 0 doit donc suivre alternativement un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, et un arc de cercle centré en $(1, 0)$.

Quitte à changer t en $-t$, nous allons raisonner en temps inverse, et construire la trajectoire optimale menant de 0 à X_0 . Pour cela, nous allons considérer toutes les trajectoires optimales partant de 0, et nous sélectionnerons celle qui passe par X_0 .

En faisant varier $p(0)$, on fait varier la trajectoire optimale. En effet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $p(0)$ détermine $p(t)$ pour tout t , ce qui définit un contrôle optimal $u(t)$, et donc une trajectoire optimale.

Représentation graphique

Prenons des exemples pour commencer à représenter l'allure des trajectoires optimales possibles.

- Si $p_1(0) = 1, p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = -\sin(t)$, donc sur $]0, \pi[$ on a $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = -1$. La trajectoire optimale correspondante, partant de 0 est donnée par

$$x(t) = -1 + \cos(t), \quad y(t) = -\sin(t).$$

Elle suit donc pendant un temps π l'arc de cercle Γ_- solution de (1.5), partant de 0.

Représentation graphique

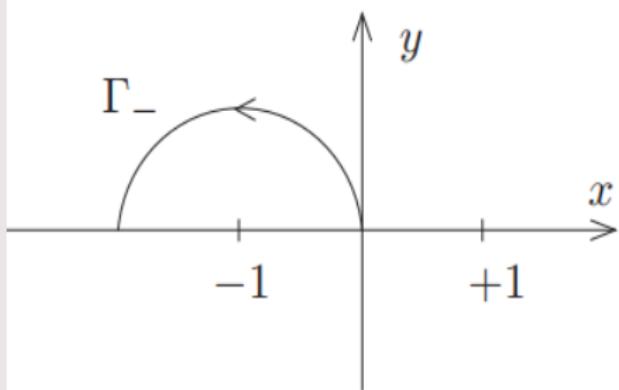


FIGURE: Présentation de Γ_-

Représentation graphique

- Si $p_1(0) = -1$, $p_2(0) = 0$, alors $p_2(t) = \sin(t)$, donc sur $]0, \pi[$ on a $u(t) = \text{signe}(p_2(t)) = +1$. La trajectoire optimale correspondante, partant de 0, suit donc pendant un temps π l'arc de cercle Γ_+ solution de (1.6), partant de 0, donnée par $x(t) = 1 - \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ car on a pris $x(0) = y(0) = 0$.

Représentation graphique

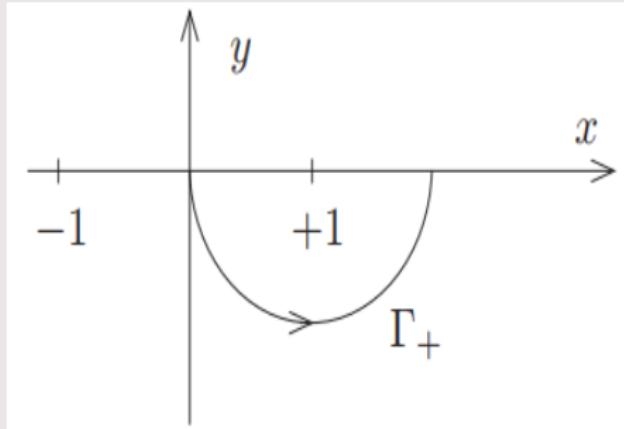


FIGURE: Présentation de Γ_+

Représentation graphique

- Pour tout autre choix de $p(0)$ tel que $p_2(0) > 0$ (resp $p_2(0) < 0$), la trajectoire optimale correspondante part de l'origine en suivant Γ_+ (resp Γ_-) jusqu'à ce que $p_2(t) = 0$. On note t_1 le premier zéro de p_2 , $0 < t_1 \leq \pi$ et M le point atteint au temps t_1 , c'est à dire $M = (x(t_1), y(t_1))$. Au-delà de ce point, $p_2(t)$ change de signe, donc le contrôle commute et prend la valeur -1 (resp $+1$), pendant une durée π (c'est à dire jusqu'à ce que $p_2(t)$ change à nouveau de signe). La trajectoire optimale doit alors être solution de (1.5) (resp de (1.6)), en partant du point de commutation M , et doit donc suivre un arc de cercle centré en $(-1, 0)$ (resp $(1, 0)$), pendant un temps π . C'est donc un demi-cercle, vu la paramétrisation des courbes de (1.5).

Représentation graphique

La trajectoire optimale rencontre un deuxième point de commutation N lorsque à nouveau $p_2(t)$ change de signe. On remarque que M et N sont symétriques par rapport au point $(-1, 0)$. Le point M appartenant au demi-cercle Γ_+ , le point N appartient au demi-cercle image de Γ_+ par la symétrie par rapport au point $(-1, 0)$ qui est aussi le translaté à gauche de Γ_- par la translation du vecteur $(-2, 0)$.

Représentation graphique

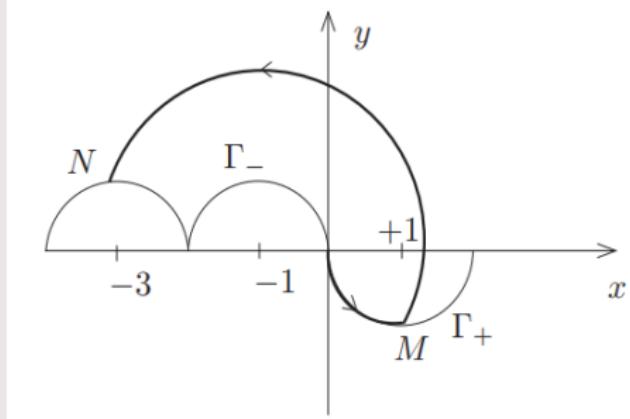


FIGURE: Les points de commutation

Représentation graphique

Poursuivons alors notre raisonnement. On se rend compte que les points de commutation de cette trajectoire optimale partant de 0 sont situés sur la courbe W construite de la manière suivante : W est l'union de tous les translatés à gauche de Γ_- par la translation précédente, et aussi de tous les translatés à droite de Γ_+ .

Les trajectoires optimales sont alors construites de la manière suivante : on part de 0 et l'on suit un morceau de Γ_+ ou de Γ_- , jusqu'à un premier point de commutation. Si par exemple on était sur Γ_+ , alors partant de ce point on suit un arc de cercle centré en $(-1, 0)$, au-dessus de W , jusqu'à ce qu'on rencontre W . De ce deuxième point de commutation, on suit un arc de cercle centré en $(1, 0)$ jusqu'à rencontrer W en un troisième point de commutation, etc.

Représentation graphique

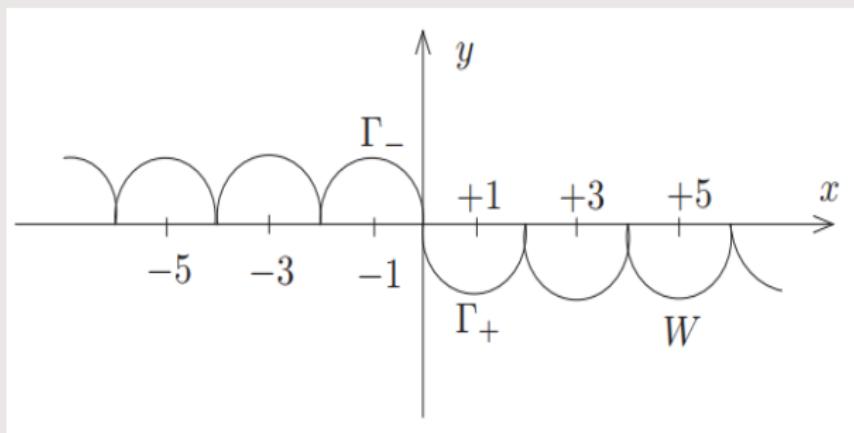


FIGURE: Ensemble W

Représentation graphique

On est maintenant en mesure de répondre à la deuxième question, du moins graphiquement. Le but est de relier 0 et X_0 par une trajectoire optimale. La théorie prévoit qu'on peut effectivement le faire. Une trajectoire partant de 0 est, comme on vient de le voir ci-dessus, déterminée par deux choix :

1. Partant de 0, on peut suivre un morceau de Γ_+ ou de Γ_- .
2. Il faut choisir le premier point de commutation.

Si maintenant on se donne un point $X_0 = (x_0, y_0)$ du plan de phase, on peut déterminer graphiquement ces deux choix, et obtenir un tracé de la trajectoire optimale. Dans la pratique, il suffit d'inverser le temps, c'est à dire de partir du point final et d'atteindre le point initial.

Représentation graphique

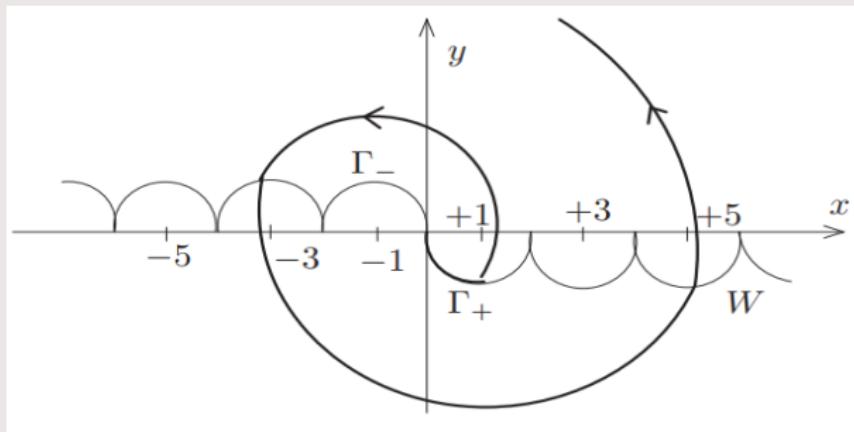


FIGURE: Trajectoire qui suit Γ_+

Représentation graphique

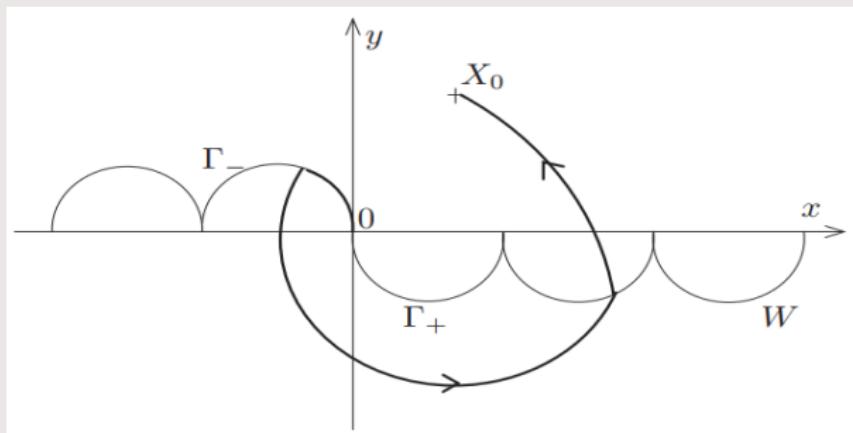


FIGURE: Trajectoire optimale qui suit Γ_-