Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Arij BOUZELMATE

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

1. **Définitions et propriétés**
2. **Convolution**
3. **Théorèmes de densité**
4. **Réflexivité-Séparabilité-Dualité**

Définitions des espaces L^p

Tout le long du chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition

Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies presque partout (on note aussi p.p.) sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

On note par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Définition

On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$|f(x)| \leq C \quad \textit{pour presque tout } x \in \Omega.$$

On note par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{C > 0;\ |f(x)| \leq C \ p.p. \ sur\ \Omega\right\}.$$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ *est appelé le supessentiel.*

Remarque

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. sur Ω.

Inégalité de Young

Lemme

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ *et* $p, p' \in]1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Alors*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Preuve

Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$. Alors, comme la fonction Log est concave, on a

$$Log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p} Log(a^p) + \frac{1}{p'} Log(b^{p'}) = Log(ab). \quad \square$$

Inégalité de Hölder

Théorème

Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$
Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$*, la fonction* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Preuve

Le résultat est évident si $p = 1$ ou si $p = +\infty$. Supposons donc $1 < p < +\infty$.
En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Preuve (suite)

D'où,

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \frac{1}{p} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'} \|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Par suite, $fg \in L^1(\Omega)$.
Maintenant pour montrer l'inégalité, on distingue deux cas.
Cas 1. Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0$. Alors, $f = 0$ *p.p.* sur Ω ou $g = 0$ *p.p.* sur Ω. On en déduit que $fg = 0$ *p.p.* sur Ω et donc $\|fg\|_{L^1(\Omega)} = 0$.
Cas 2. Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ et $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} > 0$. Alors,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}} \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

En intégrant sur Ω et en utilisant le fait que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a le résultat.$\square$

Inégalité de Hölder itérée

Théorème

Soient $p_1, \cdots, p_n \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$.

Alors, pour tous $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, *la fonction* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Preuve

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est que $p_1 = 1$. Si $n = 2$, c'est l'inégalité de Hölder. Supposons que l'inégalité est vérifiée pour n et montrons la pour $n + 1$. Nécessairement, il existe i tel que $p_i > 1$, sinon $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i} \geq n + 1 > 1$. On peut donc supposer que $p_{n+1} > 1$. Posons

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}} \right)^{-1}.$$

Ce qui donne

$$1 \leq r < +\infty, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{p_{n+1}} = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i/r} = r \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1.$$

Preuve (suite)

Comme $|f_i|^r \in L^{p_i/r}(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} |f_i|^r \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \| |f_i|^r \|_{L^{p_i/r}(\Omega)} = \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|^r_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

D'où

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|^r_{L^{p_i}(\Omega)}$$

ou encore

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Preuve (suite)

En utilisant le fait que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p_{n+1}} = 1$ et en appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} f_i$ et f_{n+1}, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right\|_{L^1(\Omega)} &\leq \left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_{L^r(\Omega)} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\Omega)} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)} \|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\Omega)} = \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

La preuve est complète. $\square$

Inégalité de Hölder généralisée

Théorème

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$.
Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *la fonction* $fg \in L^r(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve

On va traiter trois cas.

Cas 1. $1 \leq p, q, r < +\infty$.

Comme $\dfrac{r}{p} + \dfrac{r}{q} = 1$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $f_1 = |f|^r \in L^{p/r}(\Omega)$ et $g_1 = |g|^r \in L^{q/r}(\Omega)$, on obtient $f_1 g_1 \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_1 g_1\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p/r}(\Omega)} \|g_1\|_{L^{q/r}(\Omega)}.$$

C'et à dire, $fg \in L^r(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)}^r \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^r \|g\|_{L^q(\Omega)}^r.$$

Preuve (suite)

Cas 2. $q = +\infty$ et $r = p < +\infty$.
Comme $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ $p.p.\ x \in \Omega$, alors

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^p \, dx \leq \|g\|^p_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx.$$

D'où, $fg \in L^p(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Preuve (suite)

Cas 3. $p = q = r = +\infty$.
Comme $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \;\; p.p.\, x \in \Omega$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \;\; p.p.\, x \in \Omega$, alors

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \;\; p.p.\, x \in \Omega;$$

ce qui donne $fg \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La preuve est terminée. $\square$

Propriétés des espaces L^p

Inégalité d'interpolation

Proposition

Soient p et q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$.
De plus, si $\alpha \in [0,1]$ est tel que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \, \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder généralisée aux fonctions $f_1 = |f|^{\alpha} \in L^{p/\alpha}(\Omega)$ et $g_1 = |f|^{1-\alpha} \in L^{q/(1-\alpha)}(\Omega)$. On obtient donc $f_1 g_1 \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f_1 g_1\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p/\alpha}(\Omega)} \, \|g_1\|_{L^{q/(1-\alpha)}(\Omega)}. \quad \square$$

Comparaison entre les espaces L^p

Théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
Soient p, q deux réels tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$. Alors, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. De plus, il existe $C > 0$ dépendant de p, q et $mes(\Omega)$ telle que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve

On va traiter deux cas.

Cas 1. $q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Comme $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ $p.p.\, x \in \Omega$, alors

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)} \, dx\right)^{1/p}$$

$$= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \, (mes(\Omega))^{1/p} < +\infty.$$

Preuve (suite)

Cas 2. $q < +\infty$.
Soit $f \in L^q(\Omega)$. Alors, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{pq/p} \, dx \right)^{p/q} \left(\int_\Omega dx \right)^{(q-p)/q}$$
$$= \|f\|_{L^q(\Omega)}^p \, (mes(\Omega))^{(q-p)/q}.$$

D'où,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} \, (mes(\Omega))^{(q-p)/pq} < +\infty.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Théorème

$L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve

Si $p = 1$ ou $p = +\infty$, le théorème est évident. Supposons donc $1 < p < +\infty$.
Soient f, $g \in L^p(\Omega)$. Comme la fonction réelle $t \to t^p$ est convexe pour $p > 1$ alors

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Par conséquent, $f + g \in L^p(\Omega)$.

Preuve (suite)

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\,dx \\ &\leq \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Or $|f(x)+g(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ (p' est le conjugué de p) et grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|f+g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|f+g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

C'est à dire

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \qquad \text{(Inégalité de Minkowski)}$$

Preuve (suite)

De plus, il est facile de voir que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; p.p. \text{ sur } \Omega$$

et

$$\|\lambda f\|_{L^p(\Omega)} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Convergence monotone de Beppo Levi

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions de* $\mathrm{L}^1(\Omega)$ *telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < +\infty.$$

Alors, $f_n(x)$ *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* $f(x)$ *; de plus* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Convergence dominée de Lebesgue

Théorème

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$*. On suppose que*

(i) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. sur* Ω,

(ii) *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Théorème de Fischer-Riesz

Théorème

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve

On distingue deux cas.
Cas 1. $1 \leq p < +\infty$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Montrons qu'elle est convergente dans $L^p(\Omega)$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe une sous suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^p(\Omega)$.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n,\, m \geq n_\varepsilon,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Preuve (suite)

D'où, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq n_1, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2}$ et puis $\exists n_2 \geq n_1, \ \forall n, m \geq n_2, \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2^2} \cdots$
$\exists n_k \geq n_{k-1}, \ \forall n, m \geq n_k, \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2^k} \cdots$
On construit ainsi une sous suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1.$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

La suite $(g_n^p)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (car $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et croissante).

Preuve (suite)

De plus

$$\|g_n\|_{L^p(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1.$$

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, $g_n(x)$ converge $p.p.$ sur Ω vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$.
D'autre part, on a pour $m \geq k \geq 2$

$$\begin{aligned} |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x)| + \cdots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &\leq g_{m-1}(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x) - g_{k-1}(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \; p.p. \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

Preuve (suite)

Donc $(f_{n_k}(x))_k$ est de cauchy dans $\mathbb{R}$ $p.p.$ sur Ω. Soit $f(x)$ sa limite.
En utilisant le fait que $|f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ sur Ω et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient pour tout $k \geq 2$

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Par suite

$$|f(x)|^p \leq \big(|f_{n_k}(x)| + |g(x)|\big)^p \leq 2^{p-1}\big(|f_{n_k}(x)|^p + |g(x)|^p\big) \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Ce qui imlique, $f \in L^p(\Omega)$. De plus, comme $|f(x) - f_{n_k}(x)| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad p.p.$ sur Ω et $|f - f_{n_k}|^p \leq g^p$ avec $g^p \in L^1(\Omega)$, alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\|f - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Preuve (suite)

Cas 2. $p = +\infty$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n, m \geq n_\varepsilon,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

En particulier, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad ;\ \forall n, m \geq n_k.$$

Donc, il existe un ensemble E_k négligeable (i.e la mesure de E_k est nulle) tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \setminus \mathrm{E}_k, \quad \forall n, m \geq n_k.$$

Preuve (suite)

Posons $E = \underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_k$. Alors, E est négligeable et on a pour tout $x \in \Omega\backslash E$, $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ pour tout $x \in \Omega\backslash E$.
En faisant tendre $m \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega\backslash \mathrm{E}, \quad \forall n \geq n_k.$$

Par suite

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + \frac{1}{k} \leq \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega\backslash \mathrm{E}, \quad \forall n \geq n_k.$$

Preuve (suite)

En particulier, pour $n = n_k$ on a

$$|f(x)| \leq \|f_{n_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \qquad \forall x \in \Omega \setminus \mathrm{E}\,.$$

Ce qui implique $f \in L^\infty(\Omega)$. De plus, on a

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq n_k.$$

Par conséquent, $\|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. La preuve est terminée. $\square$

Convergence dominée dans $L^p(\Omega)$

Théorème

Soit $p \in [1, +\infty[$ *et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$*. On suppose que*

(i) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. sur* Ω,

(ii) *il existe une fonction* $g \in L^p(\Omega)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors, $f \in L^p(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve

Si $p = 1$, c'est exactement le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Supposons que $p > 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p.$ sur Ω, alors en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $|f(x)| \leq g(x)$ $p.p.$ sur Ω. Donc, $f \in L^p(\Omega)$.
D'autre part, on a $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ sur Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq h_n(x) \leq \big(|f_n(x)| + |f(x)|\big)^p &\leq 2^{p-1}\big(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p\big) \\ &\leq 2^{p-1}\big(g^p(x) + |f(x)|^p\big) \;\; p.p. \;\; \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

avec $\big(g^p + |f|^p\big) \in L^1(\Omega)$. Donc, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\|h_n\|_{L^1(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Remarque

Le résultat de la convergence dominée n'est pas vrai dans le cas où $p = +\infty$. *En effet, il suffit de considérer sur l'intervalle* $]0,1[$ *la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a bien $f_n \in L^\infty(]0,1[)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *p.p. sur* $]0,1[$, $f_n \leq 1_{]0,1[}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *et p.p. sur* $]0,1[$ *et* $1_{]0,1[} \in L^\infty(]0,1[)$. *Pourtant* $\|f_n\|_{L^\infty(]0,1[)} = 1$ *ne converge pas vers* 0 *quand* $n \to +\infty$.

Réciproque partielle de la convergence dominée dans $L^p(\Omega)$

Théorème

Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, telles que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que

(i) $f_{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *p.p. sur* Ω,

(ii) *il existe* $h \in L^p(\Omega)$ *telle que* $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ *et p.p. sur* Ω.

Preuve

Si $p = +\infty$, le résultat est évident en utilisant le fait que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \;\; p.p. \;\text{ sur } \Omega.$$

Supposons $1 \leq p < +\infty$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors en reprenant la démonstration du théorème de Fischer-Riesz, on peut extraire une sous suite $(f_{n_k})_k$ vérifiant

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1.$$

De la même façon, on prouve que $f_{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f^*(x) \quad p.p.$ sur Ω et il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que

$$|f^*(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \;\; p.p. \;\text{ sur } \Omega.$$

Preuve (suite)

Il en résulte que $f^* \in L^p(\Omega)$ et en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\|f^* - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $f = f^*$ $p.p.$ sur Ω. Ce qui prouve (i).

Pour obtenir (ii), on a

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f^*(x)| + g(x) \;\; p.p. \;\; \text{sur } \Omega.$$

Par suite il suffit de prendre $h = \big(|f^*| + g\big) \in L^p(\Omega)$. $\square$

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si pour presque $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \to f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, on définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

On dit que $f * g$ est défini p.p. sur $\mathbb{R}^N$.

Intégration sur un produit d'espaces

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Théorème de Tonelli

Théorème

Soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.*
On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty \qquad \textit{pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty$$

Alors, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème de Fubini

Théorème

Soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.*
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Alors, p.p.* $x \in \Omega_1$ *,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad et \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \ \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, p.p. $y \in \Omega_2$ *,*

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad et \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \ \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Convolution $L^1 * L^p$

Théorème

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *(avec* $1 \leq p \leq +\infty$*). Alors,* $f * g$ *est défini p.p. sur* $\mathbb{R}^N$*.*
De plus

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Convolution $L^1 * L^p$

Preuve

On traite trois cas.

Cas 1. $p = +\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)\,g(y)|dy &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dy \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f(x-.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.\end{aligned}$$

Donc la fonction $y \to f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et comme

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)\,g(y)|dy$$

alors $$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve (suite)

Cas 2. $p = 1$.
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par

$$F(x,y) = f(x-y)\,g(y).$$

On a $p.p.\, y \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y| \, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} |g(y)| < \infty.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y| \, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Convolution $L^1 * L^p$

Preuve (suite)

Par suite, en appliquant le théorème de Tonelli, on obtient $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et puis grâce au théorème de Fubini on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y| \, dy < \infty \qquad p.p. \ x \in \mathbb{R}^N$$

et de plus

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| \, dx \\ = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Convolution $L^1 * L^p$

Preuve (suite)

Cas 3. $1 < p < +\infty$.
D'après le deuxième cas on a $p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$ fixé, la fonction $y \to |f(x-y)|\,|g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire $|f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)| \in L_y^p(\mathbb{R}^N)$.
D'autre part, comme $|f(x-y)|^{1/p'} \in L_y^{p'}(\mathbb{R}^N)$ (p' est l'exposant conjugué de p), alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)|\,|f(x-y)|^{1/p'}\,dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/p'} < \infty\end{aligned}$$

et par suite

$$|f * g(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\ \ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p/p'} = (|f| * |g|^p)(x)\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p/p'}.$$

Preuve (suite)

En utilisant le fait que $|f| * |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (d'après le deuxième cas), on déduit que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|f\|^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

C'est à dire

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ceci achève la preuve. $\square$

Commutativité et distributivité du produit de convolution

Remarque

(i) Si $f * g$ est défini p.p. sur $\mathbb{R}^N$, alors $g * f$ est défini p.p. sur $\mathbb{R}^N$ et on a

$$f * g(x) = g * f(x) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Si $f * g$ et $f * h$ sont définis p.p. sur $\mathbb{R}^N$, , alors

$$f * (g + h)(x) = f * g(x) + f * h(x) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Inégalité de Hausdorff-Young

Théorème

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$.
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $f * g$ *est défini p.p. sur* $\mathbb{R}^N$*, de plus*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Convolution $L^p * L^q$

Preuve

On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|dy = \int_{\mathbb{R}^N} (|f(x-y)|^p|g(y)|^q)^{\frac{1}{r}}|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}|g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}dy.$$

Comme $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $|f|^p * |g|^q$ est défini $p.p$ sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy < +\infty \quad p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, $(|f(x-y)|^p|g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ $p.p.\, x \in \mathbb{R}^N$.

Preuve (suite)

Par suite, $(|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ $p.p.\, x \in \mathbb{R}^N$.
De plus, comme $|f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.) \in L^{\frac{pr}{r-p}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ (car $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$), $|g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \in L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^N)$ (car $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$) et $\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}\right) + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right) = 1$, alors d'après l'inégalité de Hölder itérée, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq \|(|f|^p(x-.)|g|^q)^{\frac{1}{r}}\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\, \||f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.)\|_{L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^N)}$$
$$\||g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|_{L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Preuve (suite)

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq \left(|f|^p * |g|^q(x)\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} < +\infty \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, $f * g(x)$ est défini $p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$ et

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \leq \left(|f|^p * |g|^q(x)\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Ce qui donne

$$|f * g(x)|^r \leq \left(|f|^p * |g|^q(x)\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Preuve (suite)

En intégrant cette dernière inégalité sur $\mathbb{R}^N$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f * g(x)|^r \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p * |g|^q(x) \, dx \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \\
&\leq \left(\| |f|^p \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \, \| |g|^q \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \\
&= \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \\
&= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^r \, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^r .
\end{aligned}$$

Finalement

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} .$$

La preuve est terminée. $\square$

La proposition suivante est une conséquence directe du théorème précédent dans le cas où $r = +\infty$.

Proposition

Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$*, alors* $f * g$ *est défini partout sur* $\mathbb{R}^N$*, de plus*

$$f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$

Support d'une fonction

Définition

Soit f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$.
On considère la famille de tous les ouverts $(w_i)_{i\in I}$ *(*I *un ensemble quelconque) de* Ω *tels que* $\forall i \in I,\ f = 0$ *p.p. sur* w_i. *Alors,* $f = 0$ *p.p. sur* $w = \bigcup\limits_{i\in I} w_i$.
L'ensemble w *est appelé ouvert d'annulation de* f. *C'est le plus grand ouvert sur lequel* f *s'annule p.p.*
On appelle support de f *et on le note* $supp(f)$ *l'ensemble défini par* $supp(f) = \Omega \backslash w$.
Si f *est continue, le support de* f *est donné par* $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega,\ \ f(x) \neq 0\}}$.

Remarque

Si $f_1 = f_2$ *p.p. sur* Ω, *alors* $supp(f_1) = supp(f_2)$. *D'où, on peut parler du support d'une fonction* $f \in L^p(\Omega)$ *avec* $p \in [1, +\infty]$.

Majoration du support de $f * g$

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $f * g$ est défini p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Alors

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

Support de $f * g$

Preuve

Soit $x \in (supp(f) + supp(g))^c = \mathbb{R}^N \setminus (supp(f) + supp(g))$. Alors $(x - supp(f)) \cap supp(g) = \emptyset$ et

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{(x-supp(f))\cap supp(g)} f(x-y)\, g(y)\, dy = 0.$$

Donc

$$f * g(x) = 0 \quad p.p. \text{ sur } \quad (supp(f) + supp(g))^c$$

et en particulier

$$f * g(x) = 0 \quad p.p. \text{ sur } \overbrace{(supp(f) + supp(g))^c}^{\circ} = \left(\overline{supp(f) + supp(g)}\right)^c.$$

Par conséquent, $supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$. $\square$

Support de $f * g$

Remarque

Si les deux supports de f et g sont compacts, alors $f * g$ est à support compact. En général, si l'un des supports seulement est compact, alors $f * g$ n'est pas à support compact.

Notations

- $C(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues (de Ω dans $\mathbb{R}$).
- $C_c(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues et à support compact (dans Ω).
- $C_c^k(\Omega)$: l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables et à support compact (dans Ω).
- $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$: l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact (dans Ω).
- $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f$ où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_N$.

Définition

Soit f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est localement intégrable sur Ω si $f 1_K \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.
On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω.

Remarque

Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega) \subset C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Convolution $C_c * L^1_{loc}$

Continuité de la convolution $C_c * L^1_{loc}$

Proposition

Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Comme $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, alors il esiste un compact $K_x \subset \mathbb{R}^N$ tel que $(x - supp(f)) \subset K_x$. On a donc $f(x-y) = 0 \quad \forall y \in K_x^c$, ce qui permet de montrer que $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable puisque

$$|f(x-y)g(y)| \leq M 1_{K_x}(y)|g(y)| \quad p.p. \ \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

où $M = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^N \ f(x - .)g(.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f * g$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$.

Preuve (suite)

Montrons maintenant que $f * g$ est continu sur $\mathbb{R}^N$.
Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x quand n tend vers $+\infty$. Alors,

$$h_n(y) = f(x_n - y)g(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(y) = f(x-y)g(y) \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

D'autre part, soit K un compact fixé tel que $(x_n - supp(f)) \subset K \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ (c'est possible car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $supp(f)$ est compact). Donc, $f(x_n - y) = 0 \;\; \forall y \in K^c$. Par suite

$$|h_n(y)| \leq M 1_K(y)|g(y)| \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Donc, en appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$f * g(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} h_n(y)\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy = f * g(x). \quad \square$$

Régularité de la convolution $C_c^k * L^1_{loc}$

Proposition

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g.$$

En particulier si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Par argument de récurrence, il suffit de faire la démonstration pour $k = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrons que $f * g$ est différentiable en x et que

$$\nabla(f * g)(x) = \nabla f * g(x).$$

Ce qui revient à montrer que

$$\frac{|f * g(x+h) - f * g(x) - \nabla f * g(x).h|}{\|h\|} \underset{\|h\| \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^N$ avec $\|h\| < 1$. On a

$$f * g(x+h) - f * g(x) - \nabla f * g(x).h =$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big[f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h \Big] g(y)dy.$$

Preuve (suite)

Comme f est ce classe C^1 sur $\mathbb{R}^N$, alors en appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale, on obtient

$$f(x+h-y)-f(x-y)=\int_0^1 \nabla f(x+th-y).h\,dt.$$

Donc, en utilisant le fait que ∇f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ (car continue et à support compact), alors

$$|f(x+h-y)-f(x-y)-\nabla f(x-y).h| =$$
$$\left|\int_0^1 \Big[\nabla f(x+th-y).h-\nabla f(x-y).h\Big]\,dt\right| \leq \varepsilon(\|h\|)\,\|h\| \quad \forall y\in\mathbb{R}^N$$

avec $\varepsilon(\|h\|)\longrightarrow 0$ quand $h\longrightarrow 0$.

Preuve (suite)

Soit K un compact fixé (assez grand) tel que $x + \overline{B(0,1)} - supp(f) \subset K$. Donc

$$f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h = 0 \quad \forall y \in K^c, \ \forall h \in B(0,1).$$

Par suite

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h| \leq \varepsilon(\|h\|)\|h\| 1_K(y) \ \forall y \in \mathbb{R}^N, \forall h \in B(0,1).$$

Par conséquent, $\forall h \in B(0,1)$ on a

$$|f*g(x+h) - f*g(x) - \nabla f*g(x).h| =$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \Big[f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h \Big] g(y)\, dy \right| \leq$$
$$\varepsilon(\|h\|)\, \|h\| \int_K |g(y)|\, dy.$$

Preuve (suite)

D'où, en utilisant le fait que $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ et $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \varepsilon(\|h\|) = 0$, on a

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f * g(x+h) - f * g(x) - \nabla f * g(x).h|}{\|h\|} = 0.$$

C'est à dire que $f * g$ est différentiable en x et que $\nabla(f * g)(x) = \nabla f * g(x)$.
La preuve de la proposition est terminée. $\square$

La proposition suivante est une conséquence directe des propositions précédentes.

Régularité de la convolution $C_c^\infty * C_c$

Proposition

Soient $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Théorème de Lusin

Théorème

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$mes\{x \in \Omega,\, f(x) \neq 0\} < \infty.$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \varphi \in C_c(\Omega) \ \ t.q. \ \ mes\{x \in \Omega,\, f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$$

et

$$|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Lemme

Soit $E(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions étagées* $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que*

$$mes\{x \in \Omega,\ \xi(x) \neq 0\} < \infty.$$

Alors,

(i) $E(\Omega)$ *est un sous espace vectoriel de* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

(ii) $E(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Théorème

Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors, $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire,

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\Omega)\ \ t.q.\ \ \|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Preuve

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, d'après le lemme précédent, il existe $\varphi \in E(\Omega)$ telle que

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilisant le théorème de Lusin, il existe $\phi \in C_c(\Omega)$ telle que

$$mes\{x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq \phi(x)\} < \left(\frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^p \ \text{ et } \ \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Preuve (suite)

Donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(x)-\phi(x)|^p\,dx &= \int_{\{x\in\Omega,\ \varphi(x)\neq\phi(x)\}} |\varphi(x)-\phi(x)|^p\,dx \\
&\leq \|\varphi-\phi\|^p_{L^\infty(\Omega)}\, mes\big\{x\in\Omega,\ \varphi(x)\neq\phi(x)\big\} \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^p \big(\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\big)^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\varphi-\phi\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\|f-\phi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f-\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi-\phi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon. \quad \square$$

Continuité de la translation

Une conséquence importante de la densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est la continuité de la translation.

Proposition

Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Pour $h \in \mathbb{R}^N$*, on définit la translation* τ_h *par* $\tau_h f(x) = f(x - h)$. *Alors*

(i) $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ *est une isométrie.*

(ii) $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$

Autrement dit, l'opérateur $h \in \mathbb{R}^N \longrightarrow \tau_h f = f(.-h) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *est continu.*

Preuve

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
(i) Pour $h \in \mathbb{R}^N$, τ_h est évidemment linéaire et on a

$$\|\tau_h f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-h)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\tau_h f - \tau_h \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= 2\|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &< \varepsilon + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Preuve (suite)

Par suite, pour montrer que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, il suffit de prouver que $\|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

Soit K le support de φ. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\|h\| \leq 1$, φ et $\tau_h \varphi$ sont nulles en dehors de l'ensemble $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^N,\ d(x, K) \leq 1\}$ (car $K \subset K_1$ et on a $x \in K_1^c \Longrightarrow x - h \in K^c$). Par suite

$$|\tau_h \varphi(x) - \varphi(x)|^p = |\varphi(x-h) - \varphi(x)|^p \leq 2^p \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} 1_{K_1}(x).$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^N$, alors elle est uniformément continue sur le compact K_1 et donc $|\tau_h \varphi(x) - \varphi(x)|^p$ converge vers 0 uniformément sur K_1 lorsque h tend vers 0, et par suite en appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient $\|\tau_h \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Remarque

Les deux résultats de la densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ et de la continuité de la translation sont faux dans le cas où $p = +\infty$.
En effet, on se place dans le cas où $N = 1$ et on considère la fonction $f = 1_{\mathbb{R}^+}$. Alors

(i) $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $\|f - \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \dfrac{1}{2}$ *pour tout* $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

(iii) $\|f(. - h) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}^*$.

Le résultat suivant se base sur la continuité de la translation.

Proposition

Soient $p, p' \in [1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, *alors* $f * g$ *est uniformément continu et borné sur* $\mathbb{R}^N$.

Preuve

On sait que $f * g$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$ et est borné.
Soit F une fonction définie par $F(x) = f(-x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$. Alors $F \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.
D'autre part, pour tous $x, z \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f * g(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x-y) - f(z-y)) g(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (F(y-x) - F(y-z)) g(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_x F(y) - \tau_z F(y)) g(y)\, dy \right| \\
&\leq \|\tau_x F - \tau_z F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|\tau_{x-z} F - F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

Or d'après la continuité de la translation,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|h\| < \delta \Longrightarrow \|\tau_h F - F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Donc, $|f * g(x) - f * g(z)| < \varepsilon \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$ dès que $\|x - z\| < \delta$; c'est à dire $x \longrightarrow f * g(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$. Ceci termine la preuve. $\square$

Suite régularisante

Définition

On appelle suite régularisante, toute suite de fonctions réelles $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *vérifiant :*

- $\rho_k(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N$,
- $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,
- $supp(\rho_k) \subset B\left(0, \dfrac{1}{k}\right)$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x)\, dx = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème

Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite régularisante. Alors*

(i) *Pour toute fonction* $f \in C(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\rho_k * f - f \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^N.$$

(ii) *Pour toute fonction* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve

(i) Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$.
Comme $C(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_k * f$ est défini et continu sur $\mathbb{R}^N$.
Soit K un compact fixé de $\mathbb{R}^N$. Montrons que $\rho_k * f - f \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur K.
Comme f est uniformément continue sur K, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (δ dépend de K et ε) tel que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K, \ \ \forall y \in B(0, \delta).$$

Preuve (suite)

En utilisant la commutativité du produit de convolution et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\,dy = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_k * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(f(x-y) - f(x)\Big)\rho_k(y)\,dy \\ &= \int_{B\left(0,\frac{1}{k}\right)} \Big(f(x-y) - f(x)\Big)\rho_k(y)\,dy.\end{aligned}$$

Donc pour $k > \dfrac{1}{\delta}$ et $x \in K$, on a

$$|\rho_k * f(x) - f(x)| < \varepsilon \int_{B\left(0,\frac{1}{k}\right)} \rho_k(y)\,dy = \varepsilon.$$

Preuve (suite)

(ii) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Comme $C_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad t.q. \quad \|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

D'une part, comme $\rho_k * (f - f_1) = \rho_k * f - \rho_k * f_1$, alors

$$\rho_k * f - f = \left[\rho_k * (f - f_1)\right] + \left[\rho_k * f_1 - f_1\right] + \left[f_1 - f\right].$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\rho_k * (f - f_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 2\|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Preuve (suite)

D'autre part, d'après (i) on a $\rho_k * f_1 \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} f_1$ uniformément sur tout compact et comme

$$supp(\rho_k * f_1) \subset \overline{supp(\rho_k) + supp(f_1)} = supp(\rho_k) + supp(f_1)$$
$$\subset \overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right)} + supp(f_1) \subset \overline{B(0,1)} + supp(f_1) = K$$

où K est un compact fixe, alors

$$\|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\rho_k * f_1(x) - f_1(x)| \left(\int_K dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On déduit que $\quad \limsup_{k \to +\infty} \|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

C'est à dire $\quad \lim_{k \to +\infty} \|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$ $\square$

Théorème

Soit $p \in [1, +\infty[$. *Alors,* $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Preuve

Elle va se faire par troncature et régularisation.
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, alors il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

Donc, $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et par suite $\rho_k * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par suite, comme $C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, alors d'après le théorème précédent

$$\|\rho_k * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $u_k = (\rho_k * g)_{|\Omega}$ la restriction de $\rho_k * g$ sur Ω. En utilisant le fait que pour k assez grand,

$$supp(\rho_k * g) \subset supp(\rho_k) + supp(f_1) \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right)} + supp(f_1) \subset \Omega,$$

alors $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ pour k assez grand et de plus $\|u_k - f_1\|_{L^p(\Omega)} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, pour k assez grand, on a

$$\|u_k - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k - f_1\|_{L^p(\Omega)} + \|f_1 - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon. \square$$

Réflexivité et séparabilité de L^p

Théorème

L'espace $L^p(\Omega)$ est

(i) *réflexif pour $p \in]1, +\infty[$,*

(ii) *séparable pour $p \in [1, +\infty[$.*

Remarque

(i) *Les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

(ii) *L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Dual de L^p

Théorème de Représentation de Riesz

Théorème

Soient $p \in [1,+\infty[$ et p' son exposant conjugué. Alors, pour tout $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, il existe un unique $u \in L^{p'}(\Omega)$ tel que

$$< \varphi, f > = \int_\Omega f(x)u(x)\,dx \qquad \text{pour tout } f \in L^p(\Omega).$$

De plus, $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$.

Remarque

(*i*) *Le dual de $L^p(\Omega)$ s'identifie à $L^{p'}(\Omega)$ si $p \in [1,+\infty[$.*

(*ii*) *Le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$ et s'identifie à l'espace des mesures de Radon.*