UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

COURS

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ARIJ BOUZELMATE

Masters : Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Année Universitaire : **2015-2016**

Table des matières

AVANT-PROPOS

L'objectif de ce polycopié est de donner les outils de base pour l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces EDP modélisent de nombreux phénomènes issus de la physique, de la chimie ou encore de la biologie et de la finance.

Le cours est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux espaces de Hilbert qui fournissent un environnement adéquat pour l'étude des problèmes variationnels. Les principaux théorèmes de projection, de représentation de Riesz-Fréchet et d'existence de base Hilbertienne sont développés.

Le deuxième chapitre comporte l'étude des espaces de Lebesgue L^p où $p \in [1, +\infty]$ qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle et en théorie des équations aux dérivées partielles. On présente leurs propriétés, les théorèmes de densité et la notion de réflexivité et de dualité.

Au troisième chapitre, on introduit les espaces de Sobolev, on présente leurs principales propriétés, les théorèmes de densité, les théorèmes de trace et les inclusions de Sobolev qui sont très utiles pour étudier la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles.

Le dernier chapitre porte sur l'étude de la formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles. Elle s'exprime dans le cadre des espaces de Hilbert et s'étend aux espaces de Banach. On prouve l'existence et l'unicité des solutions à l'aide des théorèmes de Lax-Milgram et de Minty-Browder. Enfin, on donne une application de cette étude variationnelle à un problème de Dirichlet.

Bonne Lecture
Arij Bouzelmate

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1. *On appelle forme hermitienne sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que*

(i) φ est linéaire par rapport à la première variable, c'est à dire

$\varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w)\,, \quad \forall u, v, w \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

(ii) $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}, \quad \forall u, v \in E.$

Remarque 1.1. $\varphi(u, u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in E.$

Définition 1.2. *Une forme hermitienne φ est dite positive (respectivement définie positive ou bien un produit scalaire) si pour tout $u \in E$, $\varphi(u, u) \geq 0$ (respectivement pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(u, u) > 0$).*

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***

Soit φ une forme hermitienne positive sur E. Alors

$$|\varphi(u, v)|^2 \leq \varphi(u, u)\,\varphi(v, v), \quad \forall u, v \in E.$$

Si de plus φ est définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si u et v sont linéairement dépendants.

Preuve. Soient $u, v \in E$. Si $\varphi(u, v) = 0$, le théorème est évident. Supposons alors $\varphi(u, v) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$

et $\theta \in \mathbb{C}$, alors

$$0 \leq \varphi(\lambda u + \theta v, \lambda u + \theta v) = \lambda^2 \varphi(u,u) + \lambda\,\overline{\theta}\,\varphi(u,v) + \lambda\theta\,\overline{\varphi(u,v)} + |\theta|^2 \varphi(v,v)$$

$$= \lambda^2 \varphi(u,u) + 2\lambda Re\big(\overline{\theta}\,\varphi(u,v)\big) + |\theta|^2 \varphi(v,v).$$

En prenant $\theta = \dfrac{\varphi(u,v)}{|\varphi(u,v)|}$, on obtient

$$\lambda^2 \varphi(u,u) + 2\lambda|\varphi(u,v)| + \varphi(v,v) \geq 0 \quad \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où, il faut que

$$\Delta' = |\varphi(u,v)|^2 - \varphi(u,u)\varphi(v,v) \leq 0.$$

Ce qui est la relation voulue.

La relation $|\varphi(u,v)|^2 = \varphi(u,u)\varphi(v,v)$ équivaut à $\Delta' = 0$, ce qui équivaut à $\lambda = -\dfrac{|\varphi(u,v)|}{\varphi(u,u)}$. Or

$$\varphi(\lambda u + \theta v, \lambda u + \theta v) = -\frac{|\varphi(u,v)|^2}{\varphi(u,u)} + \varphi(v,v) = 0.$$

Comme φ est définie positive, nécessairement $\lambda u + \theta v = 0$. Ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.3. *Soit φ une forme hermitienne positive (respectivement définie positive) sur E. Alors, l'application N définie sur E par $N(u) = \sqrt{\varphi(u,u)}$ pour tout $u \in E$ est une semi-norme (respectivement N est une norme).*

Preuve.

(i) $N(\lambda u) = \sqrt{\varphi(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\varphi(u,u)} = |\lambda| N(u)$.

(ii) Comme $Re\big(\varphi(u,v)\big) \leq |\varphi(u,v)| \leq N(u)N(v)$, on en déduit que

$$N^2(u+v) = \varphi(u+v, u+v) = \varphi(u,u) + \varphi(v,v) + 2Re\big(\varphi(u,v)\big)$$

$$\leq N^2(u) + N^2(v) + 2N(u)N(v) = \Big(N(u) + N(v)\Big)^2.$$

La preuve est terminée. □

Définition 1.4.

(i) *On appelle préhilbertien tout espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.*

(ii) *On dit que E est un espace de Hilbert si E est préhilbertien et complet.*

Remarque 1.3. (i) *On note le plus souvent le produit scalaire par* $(.,.)$ *et la norme par* $\|.\|$.

(ii) *Comme toute norme est continue alors le produit scalaire est une fonction continue par rapport à chaque variable.*

Exemple 1.1.

1) *L'espace vectoriel* l^2 *des suites* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres complexes de carré sommable muni du produit scalaire* $(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ *est un espace de Hilbert.*

2) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *l'espace*

$$L^2(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{C};\quad f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty \Big\}$$

muni du produit scalaire $(f,g) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition 1.5. *Soit* E *un espace préhilbertien.*

1) *Soient* $u,\ v \in E$, *non nuls. Si*

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ *tel que* $u = \lambda v$.

2) *Pour tous* $u,\ v \in E$, *on a*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\Big[\|u\|^2 + \|v\|^2\Big]. \qquad \text{(Identité de parallélogramme).}$$

3) *Pour tous* $u,\ v \in E$, *on a*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\Big[\|u\|^2 + \|v\|^2\Big]. \qquad \text{(Identité de la médiane).}$$

4) *Soient* $u,\ v \in E$. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *on a*

$$(u,v) = \frac{1}{4}\Big[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\Big].$$

5) *Soient* $u,\ v \in E$. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *on a*

$$(u,v) = \frac{1}{4}\Big[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\Big\{\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2\Big\}\Big].$$

6) *La norme* $\|.\|$ *est strictement convexe, c'est à dire*

$$\forall u,v \in E,\ \ \forall \theta \in]0,1[,\quad \Big\|\theta u + (1-\theta)v\Big\| \le \theta\|u\| + (1-\theta)\|v\|.$$

L'inégalité est stricte si $u \neq v$ avec $\|u\| = \|v\|$.

Preuve. Les démonstrations de $1)$ à $5)$ se font par calcul, tout en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc, on va montrer juste la stricte convexité. Pour cela on calcule

$$\left\|\theta u + (1-\theta)v\right\|^2 = \theta^2\|u\|^2 + (1-\theta)^2\|v\|^2 + 2\theta(1-\theta)Re(u,v)$$

et

$$\left(\theta\|u\| + (1-\theta)\|v\|\right)^2 = \theta^2\|u\|^2 + (1-\theta)^2\|v\|^2 + 2\theta(1-\theta)\|u\|\|v\|.$$

Soient $u \neq v$ avec $\|u\| = \|v\|$. Supposons qu'il y a égalité, alors on doit avoir

$$Re(u,v) = \|u\|\|v\|.$$

Par suite, on aura d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u\|\|v\| = Re(u,v) \leq |(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

D'où, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u,$ c'est à dire u et v sont colinéaires. Or $\|u\| = \|v\|$, ce qui donne $|\lambda| = 1.$

D'autre part, on a

$$Re(u,v) = Re(u,\lambda u) = Re(\overline{\lambda})\|u\|^2.$$

D'où, on doit avoir

$$Re(\overline{\lambda})\|u\|^2 = \|u\|\;\|\lambda u\| = |\lambda|\;\|u\|^2.$$

Donc

$$Re\overline{\lambda} = |\lambda| = 1 = Re\lambda.$$

D'où nécessairement, $\lambda = 1.$ On conclut qu'il n' y a égalité que si $u = v.$ $\square$

2 Théorèmes de projection

Définition 2.1. *Soit E un espace préhilbertien et soient $u, v \in E$. On dit que u est orthogonal à v si $(u,v) = 0$.*

Théorème 2.1. ***(Théorème de Pythagore)***

Soit E un espace préhilbertien et soient $u, v \in E$. Si u est orthogonal à v, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Proposition 2.2. *L'ensemble des éléments d'un espace préhilbertien E, orthogonaux à un élément $u \in E$ est un hyperplan fermé.*

Preuve. Soit $u \in E$. Posons

$$u^{\perp} = \{v \in E;\ (u,v) = 0\}.$$

Soit la fonction f définie sur E par $f(v) = (v,u)$.

f est évidemment linéaire et continue car $|f(v)| \leq \|v\|\,\|u\|$ et on a même $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \|u\|$. D'où, $u^{\perp} = f^{-1}(0)$ qui est fermé, et ainsi $u^{\perp}$ est exactement le noyau de la forme linéaire f. $\square$

2.1 Projection sur un convexe fermé

Position du problème :

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et soit C un ensemble convexe non vide de E. A tout point $x \in E$, on lui associe sa distance $d(x,C) = \inf\limits_{z \in C} \|x - z\|$.

Existe t-il un élément $y \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - y\|$?

Si $x \in C$, alors y existe et $y = x$. Si $x \in \overline{C} \setminus C$, $d(x,C) = 0$ et la borne inférieure n'est pas atteinte, et alors y ne peut pas exister. D'où, il est nécessaire de supposer que C est fermé si l'on veut que y existe pour tout $x \in E$.

Remarque 2.2. *Si $E = \mathbb{R}^2$ (identifié au plan affine après le choix d'une origine O) et C est une droite passant par l'origine ; l'élément le plus proche de $x \in \mathbb{R}^2$ est la projection de x sur la droite C qui est unique et qu'on note par $y = P_C(x)$.*

En effet, d'après le théorème de Pythagore

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2 \quad \forall z \in C.$$

Dans la suite on va généraliser le résultat à un Hilbert.

Théorème 2.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $f \in H$ il existe un unique $u \in C$ tel que*

$$\|f-u\| = \inf_{v \in C} \|f-v\|.$$

De plus u est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} u \in C \\ Re(f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in C. \end{cases}$$

On note $u = P_C(f)$ la projection de f sur C.

Preuve. Soit $f \in H$. La démonstration va se faire en trois étapes.

(i) **Existence.**

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est à dire

$$\begin{cases} v_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \\ d_n = \|f - v_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d = \inf_{v\in C} \|f-v\|. \end{cases}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy dans H. En effet, Soient n, $m \in \mathbb{N}$, en appliquant l'identité de la médiane avec $u = f - v_n$ et $v = f - v_m$, on obtient

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2}.$$

Puisque C est convexe, $\dfrac{v_n + v_m}{2} \in C$ et alors $\left\| f - \dfrac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d$. D'où,

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - d^2 \underset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \|v_n - v_m\| = 0$. Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans H et par suite, il existe $u \in H$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in C$ qui est fermé, d'où $u \in C$ et on a $d = \|f-u\|$.

(ii) **Unicité.**

Soient u_1, $u_2 \in C$ tels que $u_1 \neq u_2$ et vérifiant

$$\|f-u_1\| = \|f-u_2\| = \inf_{v\in C} \|f-v\| = d.$$

Comme la norme de H est strictement convexe, alors

$$\left\| f - \frac{u_1 + u_2}{2} \right\| = \left\| \frac{f - u_1}{2} + \frac{f - u_2}{2} \right\| < \left\| \frac{f - u_1}{2} \right\| + \left\| \frac{f - u_2}{2} \right\| = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d.$$

Ce qui est absurde puisque $\dfrac{u_1 + u_2}{2} \in C$ et $d = \inf\limits_{v \in C} \|f - v\|$.

(iii) **Caractérisation.**

$(*)$ Soit $u \in C$ tel que $\|f - u\| = \inf\limits_{v \in C} \|f - v\|$. Soit $v \in C$ et soit $\theta \in]0, 1[$.

Puisque C est convexe, alors $(1 - \theta)u + \theta v \in C$. D'où

$$\|f - u\| \leq \|f - \big((1 - \theta)u + \theta v\big)\| = \|f - u - \theta(v - u)\|,$$

et alors

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u\|^2 + \theta^2 \|v - u\|^2 - 2\theta Re(f - u, v - u).$$

Par suite

$$2Re(f - u, v - u) \leq \theta \|v - u\|^2.$$

Ceci pour tout $\theta \in]0, 1[$, d'où en faisant tendre θ vers 0, on obtient $Re(f - u, v - u) \leq 0$.

$(**)$ Inversement supposons que $u \in C$ vérifiant

$$Re(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C.$$

Comme

$$\|f - v\|^2 = \|f - u - (v - u)\|^2 = \|f - u\|^2 + \|v - u\|^2 - 2Re(f - u, v - u) \geq \|f - u\|^2,$$

alors

$$\|f - u\| \leq \|f - v\|.$$

Ceci a lieu pour tout $v \in C$. D'où, $\|f - u\| = \inf\limits_{v \in C} \|f - v\|$. $\square$

Remarque 2.4. *La projection sur un convexe fermé C possède les propriétés immédiates suivantes.*

(i) $P_C(x) = x \Longleftrightarrow x \in C$.

(ii) $P_C^2 = P_C \circ P_C = P_C$.

Définition 2.3. *Soit H un espace de Hilbert. L'application $A: H \to H$ est dite monotone si*

$$Re\Big(A(x) - A(y), x - y\Big) \geq 0, \qquad \forall x,\, y \in H.$$

Proposition 2.4. *Soit H un espace de Hilbert et soit C un convexe fermé non vide de H.*

(i) *L'application projection P_C sur C est continue sur H. C'est une contraction large et de plus elle est monotone.*

(ii) *L'application $Q = I - P_C$ vérifie les mêmes propriétés.*

Preuve. Soient $f_1,\, f_2 \in H$ et posons $u_1 = P_C(f_1)$ et $u_2 = P_C(f_2)$.

(i) On a pour tout $v \in C$,

$$Re(f_1 - u_1, v - u_1) \leq 0 \quad \text{et} \quad Re(f_2 - u_2, v - u_2) \leq 0.$$

En prenant respectivement $v = u_2$ dans la première inégalité et $v = u_1$ dans la deuxième et en faisant la somme, on obtient

$$Re(f_2 - u_2 - f_1 + u_1, u_1 - u_2) \leq 0;$$

c'est à dire

$$Re(f_2 - f_1, u_1 - u_2) + Re(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

D'où

$$0 \leq \|u_1 - u_2\|^2 \leq Re(f_2 - f_1, u_2 - u_1).$$

D'où, P_C est monotone et de plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|f_2 - f_1\| \, \|u_1 - u_2\|.$$

D'où

$$\|u_1 - u_2\| = \|P_C(f_1) - P_C(f_2)\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Donc, P_C est une contraction large, en particulier elle est continue.

(ii) Comme $Q = I - P_C$, alors

$$Re\Big(Q(f_1), P_C(f_2) - P_C(f_1)\Big) \leq 0 \quad \text{et} \quad Re\Big(Q(f_2), P_C(f_1) - P_C(f_2)\Big) \leq 0.$$

Donc

$$Re\Big(Q(f_1) - Q(f_2), (I-Q)(f_1) - (I-Q)(f_2)\Big) \geq 0.$$

D'où

$$Re\Big(Q(f_1) - Q(f_2), f_1 - f_2\Big) \geq \|Q(f_1) - Q(f_2)\|^2 \geq 0.$$

De la même façon que (i), on déduit la monotonie et la contraction large de $Q = I - P_C$. $\square$

2.2 Projection sur un sous espace vectoriel fermé

Théorème 2.5. *Soient H un espace de Hilbert et M un sous espace vectoriel fermé de H.*

Soit $f \in H$. Alors, $u = P_M(f)$ est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} u \in M \\ (f-u, v) = 0 \quad \forall v \in M; \end{cases}$$

en d'autres termes $(f - P_M(f)) \in M^\perp$. On dit que $P_M(f)$ est la projection orthogonale de f sur M.

Preuve. (i) Soient $w \in M$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, $u + \lambda(w-u) \in M$. Or M est un convexe fermé, d'où

$$Re(f-u, u+\lambda(w-u)-u) \leq 0.$$

C'est à dire

$$Re\overline{\lambda}(f-u, w-u) \leq 0.$$

En prenant $\lambda = (f-u, w-u)$, on obtient $|(f-u, w-u)| = 0$. Ceci a lieu pour tout $w \in M$. Or tout élément $v \in M$ peut s'écrire comme $v = w - u$, avec $w \in M$. D'où $(f-u, v) = 0$ pour tout $v \in M$, c'est à dire $(f-u) \in M^\perp$.

(ii) Inversement, soit $u \in M$ tel que $(f-u, v) = 0 \ \forall v \in M$. En prenant $v = w-u$, on obtient $(f-u, w-u) = 0$, d'où $Re(f-u, w-u) = 0 \ \forall w \in M$. $\square$

Proposition 2.5. *Soient H un espace de Hilbert et M un sous espace vectoriel fermé de H.*

L'application projection P_M sur M est linéaire continue de H dans H de norme ≤ 1 et égale à 1 si $M \neq \{0\}$.

De plus, $P_M^{-1}(0) = M^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel fermé supplémentaire topologique de* M *dans* H*, c'est à dire* $H = M \oplus M^{\perp}$.

Preuve. (i) La linéarité de P_M se déduit facilement de la caractérisation de la projection.

En effet, soient $f_1,\ f_2 \in H$, alors d'après la caractérisation de la projection sur M, on a

$$(f_1 - P_M(f_1), v) = 0 \quad \text{et} \quad (f_2 - P_M(f_2), v) = 0, \qquad \forall v \in M.$$

Ce qui implique que

$$(f_1 + f_2 - (P_M(f_1) + P_M(f_2)), v) = 0, \qquad \forall v \in M$$

Comme $P_M(f_1) + P_M(f_2) \in M$, alors $P_M(f_1 + f_2) = P_M(f_1) + P_M(f_2)$.

De la même façon, on montre que $P_M(\lambda f) = \lambda P_M(f), \quad \forall f \in H$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

D'autre part, on sait que P_M est une contraction large. Donc, $\|P_M(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in H$. D'où, $\|P_M\|_{\mathcal{L}_c(H,H)} \leq 1$. Si $M \neq \{0\}$, en prenant $f_0 \in M \backslash \{0\}$, on a bien $P_M(f_0) = f_0$. D'où, $\|P_M\|_{\mathcal{L}_c(H,H)} = 1$.

(ii) On sait d'après la remarque 2.4 que

$$M = \{x \in H; \quad P_M(x) = x\},$$

et d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur M,

$$P_M^{-1}(0) = \{x \in H;\ P_M(x) = 0\} = \{x \in H;\ x - P_M(x) = x - 0 \in M^{\perp}\} = \{x \in H;\ x \in M^{\perp}\} = M^{\perp}.$$

Comme P_M est continue, $P_M^{-1}(0) = M^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé.

Pour finir, il est facile de voir que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ et pour tout $f \in H,\ f = P_M(f) + (f - P_M(f))$ où $P_M(f) \in M$ et $(f - P_M(f)) \in M^{\perp}$. D'où $H = M \oplus M^{\perp}$. Ceci termine la preuve. $\square$

3 Dual d'un espace de Hilbert

Les théorèmes de projection vont nous permettre de montrer que le dual d'un espace de Hilbert peut être identifié à cet espace. Pour cela, on besoin des résultats suivants.

3.1 Dual topologique

Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et soit $X' = \mathcal{L}_c(X, \mathbb{K})$ le dual topologique de X.

On note par $< x', x >_{X',X}$ la valeur de x' au point x pour tout $(x', x) \in X' \times X$.

On munit X' par la norme

$$\|x'\|_{X'} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|< x', x >|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |< x', x >| = \sup_{\|x\|=1} |< x', x >|.$$

Puisque $\mathbb{K}$ est complet, alors X' est un espace de Banach (c'est à dire un espace vectoriel normé complet).

Remarque 3.1. *D'après la définition de la norme de X', on a*

$$|< x', x >| \leq \|x'\|_{X'} \|x\|_X \qquad \textit{pour tout } (x', x) \in X' \times X.$$

3.2 Injection canonique d'un espace préhilbertien dans son dual

Soit H un espace préhilbertien.

Soit $x \in H$. On considère l'application définie par

$$\varphi_x : \ H \to \mathbb{K}$$

$$y \to \varphi_x(y) = (y, x)$$

Il est clair que l'application φ_x est linéaire et continue, donc $\varphi_x \in H'$ et on a

$$\|\varphi_x\|_{H'} = \sup_{\|y\|=1} |\varphi_x(y)| \leq \|x\|_H.$$

De plus, si $x \neq 0$, on a

$$\|x\|_H = \frac{(x, x)}{\|x\|_H} \leq \sup_{y \in H \setminus \{0\}} \frac{|(y, x)|}{\|y\|_H} = \|\varphi_x\|_{H'}.$$

Donc $\|\varphi_x\|_{H'} = \|x\|_H$ pour tout $x \in H$; (si $x = 0$, le résultat est évident).

On conclut que φ_x est une isométrie.

Proposition 3.1. *Soit H un espace préhilbertien et soit l'application*

$$\phi : \; H \to H'$$

$$x \to \varphi_x : \; H \to \mathbb{K}$$

définie pour tout $x \in H$ par

$$< \phi(x), y >_{H',H} = \varphi_x(y) = (y, x) \quad \text{pour tout } y \in H.$$

Alors, ϕ est antilinéaire continue et injective (c'est une isométrie). On l'appelle l'injection canonique de H dans H'.

Preuve. (i) Soient $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Il est facile de voir que

$$\phi(\alpha x_1 + \beta x_2)(y) = (y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \overline{(\alpha x_1 + \beta x_2, y)} = \overline{\alpha}(y, x_1) + \overline{\beta}(y, x_2) = \overline{\alpha}\phi(x_1)(y) + \overline{\beta}\phi(x_2)(y), \quad \forall y \in H.$$

(ii) ϕ est continue et injective car pour tout $x \in H$, $\|\phi(x)\|_{H'} = \|\varphi_x\|_{H'} = \|x\|_H$. $\square$

Proposition 3.2. *Soit H un espace préhilbertien.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H et soit $x \in H$. Alors, il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

(i) $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ *dans H (convergence forte), c'est à dire* $\|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ *(convergence faible) et* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$.

(iii) $\forall y \in H \;\; (x_n, y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$ *et* $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ car l'application x' est continue et de plus $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $(x_n, y) =< \phi(y), x_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \phi(y), x >= (x, y)$ où ϕ est l'injection canonique de H dans H'.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2Re(x_n, x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$. $\square$

Remarque 3.2. *L'application ϕ est bijective de H dans $\phi(H) \subset H'$.*

La question qui se pose maintenant, quand est ce que $\phi(H) = H'$?

Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 3.3. *(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)*

Soit H un espace de Hilbert.

Etant donné $x' \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que

$$< x', y >_{H',H} = (y, x) \qquad \textit{pour tout } y \in H.$$

De plus, $\|x\|_H = \|x'\|_{H'}$.

Autrement dit, l'injection canonique ϕ est bijective.

Preuve. Il suffit de montrer que ϕ est surjective.

Pour cela, on se donne $x' \in H'$ et on pose

$$M = (x')^{-1}(0) = \{y \in H, \ < x', y >= 0\}.$$

Comme x' est continue, alors M est un sous espace vectoriel fermé de H. Deux cas se présentent.

• Si $M = H$, alors $x' = 0$ et par suite $x = 0$.

• Si $M \neq H$. Alors, $H = M \oplus M^{\perp}$ et M est un hyperplan de codimension 1. Soit e une base de $M^{\perp}$ de norme $\|e\| = 1$. S'il existe x tel que $< x', y >=< \phi(x), y >= (y, x)$ pour tout $y \in H$, alors nécessairement, $x \in M^{\perp}$ (car $< x', z >= (z, x) = 0$ pour tout $z \in M$) et alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ tel que $x = \lambda\, e$.

D'autre part, on a

$$< x', e >= (e, x) = (e, \lambda\, e) = \overline{\lambda}.$$

D'où, $\lambda = \overline{< x', e >}$ et alors $x = \overline{< x', e >}\, e$.

Inversement, soit $x = \overline{< x', e >}\, e$. Montrons que $< x', y >= (y, x)$ pour tout $y \in H$.

Soit $y \in H$. Alors, il existe $y_1 \in M$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_1 + \alpha\, e$. On a donc

$$(y, x) = (y_1 + \alpha\, e, x) = \alpha(e, x) = \alpha(e, \overline{< x', e >}\, e) = \alpha < x', e >=< x', \alpha\, e >=< x', y_1 + \alpha\, e >=< x', y > .$$

Ceci achève la démonstration. □

Remarque 3.4. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application ϕ est un isomorphisme et une isométrie de H dans H'. Ce qui permet* *d'identifier H à H'. D'où, $\forall x' \in H', \quad \exists !\, x \in H$ tel que*

$$< x', y >= (y, x) = (x, y) \qquad \forall y \in H.$$

Corollaire 3.3. *Soit H un espace de Hilbert. Alors son dual H' est un espace de Hilbert et l'application i de H dans H'' définie pour tout $x \in H$ par*

$$< (i(x), x' >_{H'',H'} = < x', x >_{H',H} \qquad \text{pour tout } x' \in H'$$

est une isométrie et un isomorphisme de H dans H''.

On dit alors que H est réflexif et donc on peut identifier H à H'' (car $i(H) = H''$) .

Preuve. Posons pour tous $x', y' \in H'$

$$((x', y')) = (\phi^{-1}(y'), \phi^{-1}(x'))$$

où ϕ est la bijection canonique de H dans H' définie par

$$< \phi(x), y >_{H',H} = (y, x) \qquad \forall x,\, y \in H.$$

Il est facile de vérifier que $((.,.))$ est un produit scalaire sur H' et comme il est complet (car $\mathbb{K}$ est complet), alors c'est un espace de Hilbert.

Soit ψ la bijection canonique de H' dans H'' définie par

$$< \psi(x'), y' >_{H'',H'} = ((y', x')) \qquad \forall x',\, y' \in H'.$$

Alors $\psi \circ \phi$ est linéaire continue bijective et une isométrie de H dans H''. De plus, $\forall x \in H \;\; \forall x' \in H'$,

$$< \psi \circ \phi(x), x' >= ((x', \phi(x))) = (x, \phi^{-1}(x')) =< \phi(\phi^{-1}(x')), x >=< x', x >=< i(x), x' > .$$

D'où $\psi \circ \phi = i$. $\square$

Il faut noter qu'on identifie très souvent H' à H. Mais faut-il le faire systématiquement ? La réponse est non.

Avant de donner un exemple qui confirme cette réponse, on démontre le résultat suivant.

Proposition 3.4. *Soient H et V deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une injection linéaire continue j de V dans H telle $j(V)$ est dense dans H. Alors, il existe une injection linéaire continue j' de H' dans V' telle que $j'(H')$ est dense dans V'.*

Notation. $V \hookrightarrow H$ *et* $\overline{V} = H \Longrightarrow H' \hookrightarrow V'$ *et* $\overline{H'} = V'$.

La preuve de la proposition nécessite le corollaire suivant.

Corollaire 3.5. *Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie de H. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est totale c'est à dire le sous espace vectoriel $L(A)$ engendré par A est dense dans H.*

(ii) *Pour tout $x' \in H'$ si x' est nulle sur A, alors x' est identiquement nulle.*

(iii) $A^{\perp} = \{0\}$.

Preuve. La démonstration va se faire en deux étapes.

Etape 1. $(i) \Longleftrightarrow (iii)$.

On montre d'abord que $\overline{L(A)}^{\perp} = A^{\perp}$.

On a $\overline{L(A)}^{\perp} \subset A^{\perp}$ car $A \subset L(A) \subset \overline{L(A)}$.

Soit maintenant $y \in A^{\perp}$, alors pour tout $a \in A$, $(a, y) = 0$ et donc d'après la linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable, on déduit que pour tout $a \in L(A)$, $(a, y) = 0$ et puis en utilisant la continuité par rapport à la même variable, on obtient $(a, y) = 0$ pour tout $a \in \overline{L(A)}$.

D'autre part, comme $\overline{L(A)}$ est un sous espace vectoriel fermé de H, alors

$$H = \overline{L(A)} \oplus \overline{L(A)}^{\perp} = \overline{L(A)} \oplus A^{\perp},$$

et par suite $(i) \Longleftrightarrow (iii)$.

Etape 2. $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$.

Supposons que $A^{\perp} = \{0\}$ et soit $x' \in H'$ telle que $< x', a >= 0 \;\; \forall a \in A$. Alors ceci est équivalent à

$$< \phi \circ \phi^{-1}(x'), a >= (a, \phi^{-1}(x')) = 0 \quad \forall a \in A.$$

où ϕ est la bijection canonique de H dans H'.

D'où, $\phi^{-1}(x') \in A^{\perp}$ ={0} et par suite $x' = 0$.

Inversement, supposons que (ii) est vérifiée. Soit $x \in A^{\perp}$, alors

$$(a, x) = 0 \quad \forall a \in A.$$

D'où

$$< \phi(x), a >= 0 \quad \forall a \in A$$

Par suite, comme $\phi(x) \in H'$

$$< \phi(x), y >= (y, x) = 0 \quad \forall y \in H$$

En particulier , on a $(x, x) = 0$, ce qui donne $x = 0$. Par conséquent, $A^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Preuve de la Proposition 3.4 On définit $j' : H' \longrightarrow V'$ par

$$< j'(x'), y >_{V',V} =< x', j(y) >_{H',H} \qquad \forall x' \in H' \text{ et } \forall y \in V.$$

(i) il est facile de voir que j' est linéaire. Montrons qu'elle est continue. On a

$$| < j'(x'), y >_{V',V} | = | < x', j(y) >_{H',H} | \leq \|x'\|_{H'} \|j(y)\|_H \leq \|x'\|_{H'} \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)} \|y\|_V.$$

D'où

$$\|j'(x')\|_{V'} \leq \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)} \|x'\|_{H'}.$$

Par suite j' est continue et de plus

$$\|j'\|_{\mathcal{L}_c(H',V')} \leq \|j\|_{\mathcal{L}_c(V,H)}.$$

(ii) j' est injective. En effet, soit $x' \in H'$ tel que $j'(x') = 0$, c'est à dire

$$< j'(x'), v >_{V',V} =< x', j(v) >_{H',H} = 0 \text{ pour tout } v \in V.$$

Or $j(V)$ est dense dans H, ce qui donne d'après le corollaire 3.5, $x' = 0$.

(iii) $j'(H')$ est dense dans V'. Montrons ceci par l'absurde en supposant que $\big(j'(H')\big)^{\perp} \neq \{0\}$.

Soit $y' \in \big(j'(H')\big)^{\perp}$. Alors y' est non identiquement nulle. D'autre part, en utilisant l'isomorphisme canonique ϕ de V dans V' (car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), on trouve que pour tout $x' \in H'$,

$$0 = ((j'(x'), y')) = (\phi^{-1}(y'), \phi^{-1}(j'(x'))) =< j'(x'), \phi^{-1}(y') >_{V',V} =< x', j \circ \phi^{-1}(y') >_{H',H} .$$

D'où $j \circ \phi^{-1}(y') = 0$, et par suite $y' = 0$. Ce qui est absurde. $\square$

Remarque 3.5.

(i) *On a le schéma* $V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'$ *où les injections sont continues et denses (on dit que* H *est l'espace pivot).*

(ii) *Tout élément* $f \in H$ $(\cong H')$ *peut être identifié à un élément* $f' \in V'$ *défini par*

$$< f', v >_{V',V} =< j' \circ \phi(f), v >_{V',V} =< \phi(f), j(v) >_{H',H} = (j(v), f)_H = (f, j(v))_H \quad \forall v \in V.$$

où ϕ *est l'isomorphisme canonique de* H *dans* H'*. D'où, si on considère* V *comme un sous espace de* H *et lui même un sous espace de* V'*, alors*

$$< f, v >_{V',V} = (f, v)_H \quad \forall f \in H \ \text{ et } \ \forall v \in V.$$

Conséquence.

L'application $j' \circ \phi \circ j$ est une injection linéaire continue de V dans V' qui est à priori distincte de l'injection canonique de V dans V'. Par conséquent, on ne peut pas toujours identifier l'espace à son dual. En effet, comme $V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'$, alors si on identifie V à V' on doit avoir $V = H$; ce qui est absurde. Ainsi on ne peut pas faire simultanément les deux identifications ; il faut choisir. L'habitude est de choisir l'identification $H' = H$.

4 Bases Hilbertiennes

Définition 4.1. *Soit* H *un espace de Hilbert.*

On appelle base Hilbertienne toute suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'éléments de* H *telle que* *(i)* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est orthonormale, c'est à dire* $(e_n, e_m) = \delta_{n,m} \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Le sous espace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dense dans* H*, c'est à dire* $\overline{L\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\{e_n\}\right)} = H$.

Proposition 4.2. *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base Hilbertienne de* H.

Alors, tout élément $x \in H$ *s'écrit*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_n.$$

De plus

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \qquad \textit{(égalité de Bessel-Parseval).}$$

Preuve. Soit $x \in H$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on note par $x_k = P_{\{e_k\}}x$ la projection de x sur $\{e_k\}$. Alors

$$x_k = (x, e_k)\, e_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

En effet, on a $x_k = \alpha_k\, e_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$; et d'après la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé,

$$(x - x_k, e_k) = (x - \alpha_k\, e_k, e_k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, $\alpha_k = (x, e_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Posons $S_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, alors

$$\|S_n x\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n, x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \qquad (R)$$

D'autre part, d'après la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé, on a

$$(x - x_k, x_k) = 0,$$

c'est à dire

$$(x, x_k) = (x_k, x_k) = \|x_k\|^2$$

et par sommation de $k = 1$ à n, on obtient

$$(x, S_n x) = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \|S_n x\|^2.$$

D'où

$$\|S_n x\| \leq \|x\|.$$

Soit $F = L\left(\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup}\{e_n\}\right)$ le sous epace vectoriel engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme F est dense dans H, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists u \in F \quad \text{tel que} \quad \|x-u\| < \varepsilon.$$

Or

$$\|S_n x - S_n u\| = \|S_n(x-u)\| \leq \|x-u\|,$$

d'où

$$\|S_n x - x\| \leq \|S_n x - S_n u\| + \|S_n u - x\| \leq \|x-u\| + \|S_n u - x\|.$$

Or pour n assez grand, $S_n u = u$; d'où

$$\|S_n x - x\| \leq 2\|x-u\| \leq 2\varepsilon \quad \text{ pour } n \text{ assez grand;}$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} S_n x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$$

et l'égalité de Bessel-Parseval se déduit facilement en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (R). □

Théorème 4.1. *Toute espace de Hilbert H admet une base Hilbertienne.*

Preuve. On va distinguer deux cas.

Cas 1. H est séparable.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite totale dans H. On va construire à partir de cette suite une base Hilbertienne.

En enlevant, par récurrence, les a_i qui sont combinaisons linéaires de ceux qui les précèdent, on peut supposer que la suite est formée d'éléments linéairement indépendants.

Pour orthogonaliser cette suite, on utilise le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en définissant une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$e_1 = a_1, \;\; e_2 = a_2 - P_{F_1}(a_2), \cdots, e_n = a_n - P_{F_{n-1}}(a_n)$$

où P_{F_i} est la projection orthogonale sur le sous espace vectoriel F_i engendré par $\{a_1, \cdots, a_i\}$ (F_i est complet car il est de dimension finie et donc fermé).

Raisonnons par récurrence, en supposant démontré que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est un système orthogonal (c'est à dire $(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$) qui engendre F_n.

La relation $e_{n+1} = a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1})$ montre que $e_{n+1} \neq 0$ puisque a_{n+1} n'appartient pas à F_n et de plus d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur un sous espace vectoriel fermé, e_{n+1} est orthogonal à F_n. Donc, $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ est un système orthogonal et comme $a_{n+1} = e_{n+1} +$ (un vecteur de F_n), ce système engendre le même sous espace que $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$, c'est à dire engendre F_{n+1}.

Donc, la suite orthogonale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans H.

Pratiquement, la détermination des éléments de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se fait ainsi : les $e_1, \cdots, e_n$ étant déterminés, on pose

$$e_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a donc

$$0 = (a_{n+1}, e_i) + \lambda_i \, (e_i, e_i).$$

D'où

$$\lambda_i = -\frac{(a_{n+1}, e_i)}{\|e_i\|^2}.$$

Si l'on pose enfin $b_n = \dfrac{e_n}{\|e_n\|}$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment orthonormale et par suite c'est une une base Hilbertienne de H.

Cas 2. H n'est pas séparable.

On suppose que H n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit A un système orthonormal de H. On désigne par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormaux de H qui contiennent A, qu'on ordonne par l'inclusion $\subset$. Alors $\mathfrak{B}$ n'est pas vide puisqu'il contient A.

Montrons que $(\mathfrak{B}, \subset)$ est inductif (c'est à dire admet un majorant). Soit $\{B_i\}_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de $(\mathfrak{B}, \subset)$.

Alors pour montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ est un majorant, il suffit de montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} B_i$ est un système orthonormal.

En effet, soient $x,\, y \in \underset{i\in I}{\cup} B_i$ tels que $x \neq y$, alors, il existe $j \in I$ tel que $x,\, y \in B_j$ (car $\{B_i\}_{i\in I}$ est totalement ordonné). D'où, $\|x\| = \|y\| = 1$ et $(x, y) = 0$. Ainsi, on a montré que $\underset{i\in I}{\cup} B_i$ est un système orthonormal.

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal B de $\mathfrak{B}$. Alors, B est une base hilbertienne de H ; en effet il suffit de montrer que B est total, c'est à dire que le sous espace $L(B)$ engendré par B est dense dans H. Sinon, d'après le corollaire 3.5, $B^{\perp} \neq \{0\}$. Soit x_0 non nul orthogonal à B. Donc, $B \cup \left\{ \dfrac{x_0}{\|x_0\|} \right\}$ est un système orthonormal qui contient strictement B. Or ceci contredit le caractère maximal de B. Donc, B est total est par suite une base Hilbertienne de H. $\square$

Remarque 4.2. *Tout système orthonormal d'un espace de Hilbert est contenu dans une base Hilbertienne.*

Chapitre 2

Espaces L^p

Tout le long du chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1. *(i) Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies presque partout (on note aussi $p.p.$) sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx < \infty$.*

On note par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

(ii) On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant $|f(x)| \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$.

On note par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\big\{C > 0;\ \ |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega\big\}.$$

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ est appelé le supessentiel.

Remarque 1.1. *Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ $p.p.$ sur Ω.*

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Young)***

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ et $p,\ p' \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Preuve. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est triviale. Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$. Alors, comme la fonction Log est concave, on a

$$Log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}Log(a^p) + \frac{1}{p'}Log(b^{p'}) = Log(ab).$$

D'où, le résultat. $\square$

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Hölder)***

Soient $p,\ p' \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, la fonction $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Preuve. D'après la remarque 1.1, le résultat est évident si $p = 1$ ou si $p = +\infty$. Supposons donc $1 < p < +\infty$.

En utilisant l'inégalité de Young, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

D'où,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Par suite, $fg \in L^1(\Omega)$.

Maintenant pour montrer l'inégalité, on distingue deux cas.

Cas 1. Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0$. Alors, $f = 0$ $p.p.$ sur Ω ou $g = 0$ $p.p.$ sur Ω. On en déduit que $fg = 0$ $p.p.$ sur Ω et donc $\|fg\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Cas 2. Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ et $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} > 0$. Alors,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}} \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

En intégrant sur Ω et en utilisant le fait que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, on a le résultat. $\square$

Théorème 1.3. ***(Inégalité de Hölder itérée)***

Soient $p_1,\cdots,p_n\in[1,+\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p_1}+\cdots+\dfrac{1}{p_n}=1.$
Alors, pour tous $f_i\in L^{p_i}(\Omega),\ 1\le i\le n,$ *la fonction* $\displaystyle\prod_{i=1}^n f_i\in L^1(\Omega)$ *et*

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_{L^1(\Omega)}\le\prod_{i=1}^n\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n=1,$ c'est que $p_1=1$. Si $n=2,$ c'est l'inégalité de Hölder. Supposons que l'inégalité est vérifiée pour n et montrons la pour $n+1$. Nécessairement, il existe i tel que $p_i>1$, sinon $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{p_i}\ge n+1>1$. On peut donc supposer que $p_{n+1}>1$. Posons

$$r=\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{p_{n+1}}\right)^{-1}.$$

Ce qui donne

$$1\le r<+\infty,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{p_{n+1}}=1,\quad \text{et}\quad \sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i/r}=r\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}=1.$$

Comme $|f_i|^r\in L^{p_i/r}(\Omega)$ pour tout $1\le i\le n$, alors d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\left\|\prod_{i=1}^n|f_i|^r\right\|_{L^1(\Omega)}\le\prod_{i=1}^n\||f_i|^r\|_{L^{p_i/r}(\Omega)}=\prod_{i=1}^n\|f_i\|^r_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

D'où

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|^r_{L^r(\Omega)}\le\prod_{i=1}^n\|f_i\|^r_{L^{p_i}(\Omega)}$$

ou encore

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_{L^r(\Omega)}\le\prod_{i=1}^n\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{p_{n+1}}=1$ et en appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $\displaystyle\prod_{i=1}^n f_i$ et f_{n+1}, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right\|_{L^1(\Omega)}&\le\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_{L^r(\Omega)}\|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\Omega)}\\&\le\prod_{i=1}^n\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}\|f_{n+1}\|_{L^{p_{n+1}}(\Omega)}=\prod_{i=1}^{n+1}\|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.\end{aligned}$$

La preuve est complète. $\square$

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Hölder généralisée)***

Soient $p,\, q,\, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$.

Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *la fonction* $fg \in L^r(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\, \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve. On va traiter trois cas.

Cas 1. $1 \leq p,\, q,\, r < +\infty$.

Comme $\dfrac{r}{p} + \dfrac{r}{q} = 1$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder aux fonctions $f_1 = |f|^r \in L^{p/r}(\Omega)$ et $g_1 = |g|^r \in L^{q/r}(\Omega)$, on obtient $f_1 g_1 \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_1 g_1\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p/r}(\Omega)}\, \|g_1\|_{L^{q/r}(\Omega)}.$$

C'et à dire, $fg \in L^r(\Omega)$ et

$$\|fg\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^r_{L^p(\Omega)}\, \|g\|^r_{L^q(\Omega)}.$$

Cas 2. $q = +\infty$ et $r = p < +\infty$.

Comme $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ $\;p.p.\, x \in \Omega$, alors

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|^p\, dx \leq \|g\|^p_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|^p\, dx.$$

D'où, $fg \in L^p(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Cas 3. $p = q = r = +\infty$.

Comme $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ $\;p.p.\, x \in \Omega$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ $\;p.p.\, x \in \Omega$, alors

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \quad p.p.\, x \in \Omega;$$

ce qui donne $fg \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

La preuve est terminée. $\square$

La proposition suivante est une conséquence de l'inégalité de Hölder généralisée.

Proposition 1.3. ***(Inégalité d'interpolation)***

Soient p et q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$.

De plus, si $\alpha \in [0,1]$ est tel que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, on a l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder généralisée aux fonctions $f_1 = |f|^{\alpha} \in L^{p/\alpha}(\Omega)$ et $g_1 = |f|^{1-\alpha} \in L^{q/(1-\alpha)}(\Omega)$. On obtient donc $f_1 g_1 \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f_1 g_1\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p/\alpha}(\Omega)} \|g_1\|_{L^{q/(1-\alpha)}(\Omega)}.$$

D'où, le résultat. $\square$

Théorème 1.5. ***(Comparaison entre les espaces L^p)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Soient p, q deux réels tels que $1 \leq p < q \leq +\infty$. Alors, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. De plus, il existe $C > 0$ dépendant de p, q et $mes(\Omega)$ telle que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve. On va traiter deux cas.

Cas 1. $q = +\infty$.

Soit $f \in L^{\infty}(\Omega)$. Comme $|f(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ $p.p.\ x \in \Omega$, alors

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} \|f\|^p_{L^{\infty}(\Omega)}\, dx\right)^{1/p} = \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} \left(mes(\Omega)\right)^{1/p} < +\infty.$$

Cas 2. $q < +\infty$.

Soit $f \in L^q(\Omega)$. Alors, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^{pq/p} \, dx \right)^{p/q} \left(\int_\Omega dx \right)^{(q-p)/q}$$
$$= \|f\|_{L^q(\Omega)}^p \ (mes(\Omega))^{(q-p)/q}.$$

D'où,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^q(\Omega)} \, (mes(\Omega))^{(q-p)/pq} < +\infty.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Théorème 1.6. *$L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme pour tout $1 \le p \le +\infty$.*

Preuve. Si $p = 1$ ou $p = +\infty$, le théorème est évident. Supposons donc $1 < p < +\infty$.

Soient $f, \ g \in L^p(\Omega)$. Comme la fonction réelle $t \to t^p$ est convexe pour $p > 1$ alors

$$|f(x) + g(x)|^p \le (|f(x)| + |g(x)|)^p \le 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Par conséquent, $f + g \in L^p(\Omega)$. D'autre part,

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| \, dx$$
$$\le \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| \, dx + \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| \, dx.$$

Or $|f(x) + g(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ (p' est le conjugué de p) et grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p \le \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

C'est à dire

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \qquad \text{(Inégalité de Minkowski)}$$

De plus, il est facile de voir que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \ p.p. \text{ sur } \Omega$$

et

$$\|\lambda f\|_{L^p(\Omega)} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Théorème 1.7. ***(Fischer-Riesz)***

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Pour la démonstration on a besoin des deux résultats suivants.

Théorème 1.8. ***(Convergence monotone de Beppo Levi)***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < +\infty.$$

Alors, $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 1.9. ***(Convergence dominée de Lebesgue)***

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que

(i) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ p.p. sur Ω,

(ii) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors, $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve du théorème 1.7. On distingue deux cas.

Cas 1. $1 \leq p < +\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Montrons qu'elle est convergente dans $L^p(\Omega)$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe une sous suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n,\, m \geq n_\varepsilon,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

D'où, $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \ \forall n,\, m \geq n_1,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2}$ et puis $\exists n_2 \geq n_1,\ \ \forall n,\, m \geq n_2,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2^2} \cdots$ $\exists n_k \geq n_{k-1},\ \ \forall n,\, m \geq n_k,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \dfrac{1}{2^k} \cdots$

On construit ainsi une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1.$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

La suite $(g_n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (car $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et croissante) ; de plus

$$\|g_n\|_{L^p(\Omega)} = \left\| \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1.$$

Donc, d'après le théorème 1.8 de la convergence monotone, $g_n(x)$ converge $p.p.$ sur Ω vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$.

D'autre part, on a pour $m \geq k \geq 2$

$$\begin{aligned} |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x)| + |f_{n_{m-1}}(x) - f_{n_{m-2}}(x)| + \cdots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &\leq g_{m-1}(x) - g_{k-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{k-1}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad p.p. \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

Donc $(f_{n_k}(x))_k$ est de cauchy dans $\mathbb{R}$ $p.p.$ sur Ω. Soit $f(x)$ sa limite.

En utilisant le fait que

$$|f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad p.p. \text{ sur } \Omega$$

et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient pour tout $k \geq 2$

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Par suite

$$|f(x)|^p \leq \big(|f_{n_k}(x)| + |g(x)|\big)^p \leq 2^{p-1}\big(|f_{n_k}(x)|^p + |g(x)|^p\big) \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Ce qui imlique, $f \in L^p(\Omega)$. De plus, comme $|f(x) - f_{n_k}(x)| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ sur Ω et $|f - f_{n_k}|^p \leq g^p$ avec $g^p \in L^1(\Omega)$, alors d'après le théorème 1.9 de la convergence dominée de Lebesgue, $\|f - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cas 2. $p = +\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall n,\, m \geq n_\varepsilon,\ \ \|f_n - f_m\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon.$$

En particulier, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad ; \forall n,\, m \geq n_k.$$

Donc, il existe un ensemble E_k négligeable (i.e la mesure de E_k est nulle) tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash \mathrm{E}_k, \quad \forall n,\, m \geq n_k.$$

Posons $E = \underset{k\in\mathbb{N}^*}{\cup} E_k$. Alors, E est négligeable et on a pour tout $x \in \Omega\backslash E$, $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ pour tout $x \in \Omega\backslash E$.

En faisant tendre $m \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash \mathrm{E}, \quad \forall n \geq n_k.$$

Par suite

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + \frac{1}{k} \leq \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash \mathrm{E}, \quad \forall n \geq n_k.$$

En particulier, pour $n = n_k$ on a

$$|f(x)| \leq \|f_{n_k}\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 \qquad \forall x \in \Omega \backslash \mathrm{E}\,.$$

Ce qui implique $f \in L^\infty(\Omega)$. De plus, on a

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq n_k.$$

Par conséquent, $\|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La preuve est terminée. □

Théorème 1.10. *(Convergence dominée dans $L^p(\Omega)$)*

Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que

(i) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ p.p. sur Ω,

(ii) il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors, $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve. Si $p = 1$, c'est exactement le théorème 1.9 de la convergence dominée de Lebesgue. Supposons que $p > 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $p.p.$ sur Ω, alors en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$|f(x)| \leq g(x)$ $p.p.$ sur Ω. Donc, $f \in L^p(\Omega)$.

D'autre part, on a $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ sur Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq h_n(x) \leq \big(|f_n(x)| + |f(x)|\big)^p \leq 2^{p-1}\big(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p\big) \leq 2^{p-1}\big(g^p(x) + |f(x)|^p\big) \;\; p.p. \;\text{ sur } \Omega$$

avec $\big(g^p + |f|^p\big) \in L^1(\Omega)$. Donc, d'après le théorème 1.9, $\|h_n\|_{L^1(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La preuve est terminée. □

Remarque 1.11. *Le résultat de la convergence dominée n'est pas vrai dans le cas où $p = +\infty$. En effet, il suffit de considérer sur l'intervalle $]0,1[$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par*

$$f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a bien $f_n \in L^\infty(]0,1[)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ sur $]0,1[$, $f_n \leq 1_{]0,1[}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $p.p.$ sur $]0,1[$ et $1_{]0,1[} \in L^\infty(]0,1[)$. Pourtant $\|f_n\|_{L^\infty(]0,1[)} = 1$ ne converge pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

Théorème 1.12. ***(Réciproque partielle de la convergence dominée dans $L^p(\Omega)$)***

Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, telles que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que

(i) $f_{n_k}(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ $p.p.$ sur Ω,

(ii) il existe $h \in L^p(\Omega)$ telle que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et $p.p.$ sur Ω.

Preuve. Si $p = +\infty$, le résultat est évident en utilisant le fait que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty(\Omega)} \;\; p.p. \;\text{ sur } \Omega.$$

Supposons $1 \leq p < +\infty$. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors en reprenant la démonstration du théorème 1.7, on peut extraire une sous suite $(f_{n_k})_k$ vérifiant

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1.$$

De la même façon, on prouve que $f_{n_k}(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f^*(x)$ $p.p.$ sur Ω et il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que

$$|f^*(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \;\; p.p. \;\text{ sur } \Omega.$$

Il en résulte que $f^* \in L^p(\Omega)$ et en appliquant le théorème 1.9 de la convergence dominée de Lebesgue, $\|f^* - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, $f = f^*$ $p.p.$ sur Ω. Ce qui prouve (i).

Pour obtenir (ii), on a

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f^*(x)| + g(x) \;\; p.p. \;\; \text{sur } \Omega.$$

Par suite il suffit de prendre $h = \big(|f^*| + g\big) \in L^p(\Omega)$. □

2 Convolution

Définition 2.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Si pour presque $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \to f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, on définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

On dit que $f * g$ est défini $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.1. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (avec $1 \leq p \leq +\infty$). Alors, $f * g$ est défini $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, de plus*

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

La démonstration nécessite les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.2. ***(Tonelli)***

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $F:\,\Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty$$

Alors, $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 2.3. ***(Fubini)***

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, $p.p.\ x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad et \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \ \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, $p.p.\ y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad et \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \ \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Preuve du théorème 2.1. On traite trois cas.

Cas 1. $p = +\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)\,g(y)|dy \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dy = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|f(x-.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Donc la fonction $y \to f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et comme

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)\,g(y)|dy$$

alors

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Cas 2. $p = 1$.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par

$$F(x,y) = f(x-y)\,g(y).$$

On a $p.p.\, y \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}|g(y)| < \infty.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Par suite, en appliquant le théorème 2.2 de Tonelli, on obtient $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et puis grâce au théorème 2.3 de Fubini on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y|\, dy < \infty \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$$

et de plus

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Cas $3.$ $1 < p < +\infty$.

D'après le deuxième cas on a $p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$ fixé, la fonction $y \to |f(x-y)|\, |g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire $|f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$. D'autre part, comme $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$ (p' est l'exposant conjugué de p), alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{1/p}\, |g(y)|\, |f(x-y)|^{1/p'}\, dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy\right)^{1/p} \|f\|^{1/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

et par suite

$$|f * g(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy \;\; \|f\|^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)} = (|f| * |g|^p)(x)\, \|f\|^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant le fait que $|f| * |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (d'après le deuxième cas), on déduit que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \|f\|^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

C'est à dire

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ceci achève la preuve. □

Remarque 2.4.

(i) *Si $f * g$ est défini $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors $g * f$ est défini $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et on a*

$$f * g(x) = g * f(x) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Si $f * g$ et $f * h$ sont définis p.p. sur $\mathbb{R}^N$, , alors

$$f * (g+h)(x) = f * g(x) + f * h(x) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 2.5. ***(Inégalité de Hausdorff-Young)***

Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$.

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g$ est défini p.p. sur $\mathbb{R}^N$, de plus

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve. On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} |f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} |g(y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\,dy.$$

Comme $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors d'après le théorème 2.1, $|f|^p * |g|^q$ est défini $p.p$ sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p |g(y)|^q\,dy < +\infty \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, $(|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \in L^r(\mathbb{R}^N)$ $p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$.

De plus, comme $|f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.) \in L^{\frac{pr}{r-p}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ (car $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$), $|g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \in L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^N)$ (car $|g|^q \in L^1(\mathbb{R}^N)$) et $\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{r}\right) + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{r}\right) = 1$, alors d'après l'inégalité de Hölder itérée, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le \|(|f|^p(x-.)|g|^q)^{\frac{1}{r}}\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\, \||f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.)\|_{L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^N)}\, \||g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|_{L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^N)} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le (|f|^p * |g|^q(x))^{\frac{1}{r}}\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} < +\infty \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Par suite, $f * g(x)$ est défini $p.p.\ x \in \mathbb{R}^N$ et

$$|f * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \le (|f|^p * |g|^q(x))^{\frac{1}{r}}\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Ce qui donne

$$|f * g(x)|^r \le (|f|^p * |g|^q(x)) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p}\, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} \qquad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

En intégrant sur $\mathbb{R}^N$ et en utilisant le théorème 2.1, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f*g(x)|^r\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p * |g|^q(x)\,dx\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q}$$
$$\leq \left(\||f|^p\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \||g|^q\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q}$$
$$= \left(\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{q}\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r-p} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r-q} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{r} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{r}.$$

Finalement

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

La preuve est terminée. □

La proposition suivante est une conséquence directe du théorème 2.5 dans le cas où $r = +\infty$.

Proposition 2.2. *Soient* $p,\, p' \in [1,+\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, *alors* $f*g$ *est défini partout sur* $\mathbb{R}^N$, *de plus*

$$f*g \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$

Définition 2.3. ***(Support d'une fonction)***

Soit f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$.

On considère la famille de tous les ouverts $(w_i)_{i\in I}$ *(*I *un ensemble quelconque) de* Ω *tels que* $\forall i \in I,\ f = 0$ *p.p. sur* w_i. *Alors,* $f = 0$ *p.p. sur* $w = \underset{i\in I}{\cup} w_i$.

L'ensemble w *est appelé ouvert d'annulation de* f. *C'est le plus grand ouvert sur lequel* f *s'annule p.p.*

On appelle support de f *et on le note* $supp(f)$ *l'ensemble défini par* $supp(f) = \Omega \backslash w$.

Si f *est continue, le support de* f *est donné par*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega,\ \ f(x) \neq 0\}}.$$

Remarque 2.6. *Si* $f_1 = f_2$ *p.p. sur* Ω, *alors* $supp(f_1) = supp(f_2)$. *D'où, on peut parler du support d'une fonction* $f \in L^p(\Omega)$ *avec* $p \in [1,+\infty]$.

Proposition 2.4. ***(Majoration du support de*** $f*g$***)***

Soient f *et* g *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}^N$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Si $f * g$ est défini $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. Alors

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

Preuve. Soit $x \in (supp(f) + supp(g))^c = \mathbb{R}^N \setminus (supp(f) + supp(g))$. Alors $(x - supp(f)) \cap supp(g) = \emptyset$ et

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{(x-supp(f))\cap supp(g)} f(x-y)\, g(y)\, dy = 0.$$

Donc

$$f * g(x) = 0 \quad p.p. \ \text{ sur } \ (supp(f) + supp(g))^c$$

et en particulier

$$f * g(x) = 0 \quad p.p. \ \text{ sur } \ \overbrace{(supp(f) + supp(g))^c}^{\circ} = \left(\overline{supp(f) + supp(g)}\right)^c = \mathbb{R}^N \setminus \left(\overline{supp(f) + supp(g)}\right).$$

Par conséquent,

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

La preuve est terminée. □

Remarque 2.7. *Si les deux supports de f et g sont compacts, alors $f * g$ est à support compact. En général, si l'un des supports seulement est compact, alors $f * g$ n'est pas à support compact.*

Dans la suite, on aura besoin des notations suivantes.

Notations.

$C(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues (de Ω dans $\mathbb{R}$).

$C_c(\Omega)$: l'ensemble des fonctions continues et à support compact (dans Ω).

$C_c^k(\Omega)$: l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables et à support compact (dans Ω).

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$: l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact (dans Ω).

$D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f$ où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_N$.

Définition 2.5. *Soit f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$.*

On dit que f est localement intégrable sur Ω si $f1_K \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

On note $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω.

Remarque 2.8. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega) \subset C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

Proposition 2.6. ***(Continuité de la convolution $C_c * L^1_{loc}$)***

Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Comme $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$, alors il esiste un compact $K_x \subset \mathbb{R}^N$ tel que $(x - supp(f)) \subset K_x$.

On a donc $f(x-y) = 0 \ \ \forall y \in K_x^c$, ce qui permet de montrer que $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable puisque

$$|f(x-y)g(y)| \leq M1_{K_x}(y)|g(y)| \ \ p.p. \ \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

où $M = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^N \ \ f(x-.)g(.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f * g$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$.

Montrons maintenant que $f * g$ est continu sur $\mathbb{R}^N$.

Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x quand n tend vers $+\infty$. Alors,

$$h_n(y) = f(x_n - y)g(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(y) = f(x-y)g(y) \ \ p.p. \ \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

D'autre part, soit K un compact fixé tel que $(x_n - supp(f)) \subset K \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (c'est possible car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $supp(f)$ est compact). Donc, $f(x_n - y) = 0 \ \forall y \in K^c$. Par suite

$$|h_n(y)| \leq M1_K(y)|g(y)| \ \ p.p. \ \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Donc, en appliquant le théorème 1.9 de la convergence dominée, on obtient

$$f * g(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x_n - y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} h_n(y)\,dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy = f * g(x).$$

D'où le résultat. $\square$

Proposition 2.7. ***(Régularité de la convolution $C^k_c * L^1_{loc}$)***

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g.$$

En particulier si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Par argument de récurrence, il suffit de faire la démonstration pour $k = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Montrons que $f * g$ est différentiable en x et que

$$\nabla(f * g)(x) = \nabla f * g(x).$$

Ce qui revient à montrer que

$$\frac{|f * g(x+h) - f * g(x) - \nabla f * g(x).h|}{\|h\|} \underset{\|h\| \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^N$ avec $\|h\| < 1$. On a

$$f * g(x+h) - f * g(x) - \nabla f * g(x).h = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h\Big] g(y)\, dy.$$

Comme f est ce classe C^1 sur $\mathbb{R}^N$, alors en appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale, on obtient

$$f(x+h-y) - f(x-y) = \int_0^1 \nabla f(x+th-y).h\, dt.$$

Donc, en utilisant le fait que ∇f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ (car continue et à support compact), alors

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h| = \left| \int_0^1 \Big[\nabla f(x+th-y).h - \nabla f(x-y).h\Big]\, dt \right| \leq \varepsilon(\|h\|)\, \|h\| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\varepsilon(\|h\|) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$.

Soit K un compact fixé (assez grand) tel que $x + \overline{B(0,1)} - supp(f) \subset K$. Donc

$$f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h = 0 \qquad \forall y \in K^c,\ \forall h \in B(0,1).$$

Par suite

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y).h| \leq \varepsilon(\|h\|)\, \|h\|\, 1_K(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N,\ \forall h \in B(0,1).$$

Par conséquent, $\forall h \in B(0,1)$ on a

$$|f*g(x+h)-f*g(x)-\nabla f*g(x).h| = \left|\int_{\mathbb{R}^N}\Big[f(x+h-y)-f(x-y)-\nabla f(x-y).h\Big]g(y)\,dy\right| \leq \varepsilon(\|h\|)\,\|h\|\int_K |g(y)|\,dy.$$

D'où, en utilisant le fait que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\varepsilon(\|h\|)=0$, on a

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|f*g(x+h)-f*g(x)-\nabla f*g(x).h|}{\|h\|}=0.$$

C'est à dire que $f*g$ est différentiable en x et que $\nabla(f*g)(x)=\nabla f*g(x)$. $\square$

La proposition suivante est une conséquence directe des deux propositions 2.4 et 2.7.

Proposition 2.8. ***(Régularité de la convolution** $C_c^\infty * C_c$ **)***

Soient $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f*g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

3 Théorèmes de densité

3.1 Densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$

Théorème 3.1. *Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors, $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire,*

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\varphi\in C_c(\Omega)\ \ t.q.\ \ \|f-\varphi\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon.$$

Pour la démonstration on a besoin des deux résultats d'intégration suivants.

Théorème 3.2. ***(Lusin)***

Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $mes\{x\in\Omega,\ f(x)\neq 0\}<\infty$. Alors,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\varphi\in C_c(\Omega)\ \ t.q.\ \ mes\{x\in\Omega,\ f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$$

et

$$|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Lemme 3.1. *Soit $E(\Omega)$ l'ensemble des fonctions étagées $\xi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ tel que $mes\{x\in\Omega,\ \xi(x)\neq 0\}<\infty$. Alors,*

(i) $E(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $L^p(\Omega)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.

(ii) $E(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p\in[1,+\infty[$.

Preuve du théorème 3.1. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, d'après le lemme 3.1, il existe $\varphi \in E(\Omega)$ telle que

$$\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilisant le théorème 3.2 de Lusin, il existe $\phi \in C_c(\Omega)$ telle que

$$mes\{x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq \phi(x)\} < \left(\frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^p$$

et

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(x) - \phi(x)|^p\, dx &= \int_{\{x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq \phi(x)\}} |\varphi(x) - \phi(x)|^p\, dx \\
&\leq \|\varphi - \phi\|^p_{L^\infty(\Omega)}\, mes\{x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq \phi(x)\} \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}\right)^p \left(\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\right)^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\varphi - \phi\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\|f - \phi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi - \phi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Le théorème est démontré. $\square$

Une conséquence importante du théorème 3.1 est le résultat suivant.

Proposition 3.2. ***(Continuité de la translation)***

Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Pour $h \in \mathbb{R}^N$, on définit la translation τ_h par $\tau_h f(x) = f(x - h)$. Alors

(i) $\tau_h :\ L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ est une isométrie.

(ii) $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$

Autrement dit, l'opérateur $h \in \mathbb{R}^N \longrightarrow \tau_h f = f(. - h) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ est continu.

Preuve. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

(i) Pour $h \in \mathbb{R}^N$, τ_h est évidemment linéaire et on a

$$\|\tau_h f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-h)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,dx = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors, d'après le théorème 3.1, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|f-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\le \|\tau_h f - \tau_h\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &= 2\|f-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &< \varepsilon + \|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Par suite, pour montrer que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, il suffit de prouver que $\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

Soit K le support de φ. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $\|h\| \le 1$, φ et $\tau_h\varphi$ sont nulles en dehors de l'ensemble $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^N,\ d(x,K) \le 1\}$ (car $K \subset K_1$ et on a $x \in K_1^c \Longrightarrow x-h \in K^c$). Par suite

$$|\tau_h\varphi(x) - \varphi(x)|^p = |\varphi(x-h) - \varphi(x)|^p \le 2^p\|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} 1_{K_1}(x).$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^N$, alors elle est uniformément continue sur le compact K_1 et donc $|\tau_h\varphi(x) - \varphi(x)|^p$ converge vers 0 uniformément sur K_1 lorsque h tend vers 0, et par suite en appliquant le théorème 1.9 de la convergence dominée, on obtient $\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{h\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$. La preuve est terminée. □

Remarque 3.3. *Les deux résultats du théorème 3.1 et de la proposition 3.2 sont faux dans le cas où $p = +\infty$. En effet, on se place dans le cas où $N = 1$ et on considère la fonction $f = 1_{\mathbb{R}^+}$. Alors*

(i) $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $\|f-\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ge \frac{1}{2}$ *pour tout* $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

(iii) $\|f(.-h) - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}^*$.

Le résultat suivant se base sur la continuité de la translation.

Proposition 3.3. ***(Continuité uniforme de la convolution*** $L^p * L^{p'}$ ***)***

Soient $p,\, p' \in [1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$*, alors* $f * g$ *est uniformément continu et borné sur* $\mathbb{R}^N$*.*

Preuve. D'après la proposition 2.2, $f * g$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$ et est borné.

Soit F une fonction définie par $F(x) = f(-x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$. Alors $F \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

D'autre part, pour tous $x,\ z \in \mathbb{R}^N$,

$$
\begin{aligned}
|f * g(x) - f * g(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x-y) - f(z-y)) g(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (F(y-x) - F(y-z)) g(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_x F(y) - \tau_z F(y)) g(y)\, dy \right| \\
&\leq \|\tau_x F - \tau_z F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} = \|\tau_{x-z} F - F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Or d'après la proposition précédente,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ \|h\| < \delta \Longrightarrow \|\tau_h F - F\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Donc, $|f * g(x) - f * g(z)| < \varepsilon \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$ dès que $\|x - z\| < \delta$; c'est à dire $x \longrightarrow f * g(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$. Ceci termine la preuve. $\square$

3.2 Régularisation par convolution

Définition 3.4. ***(Suite régularisante)***

On appelle suite régularisante, toute suite de fonctions réelles $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *vérifiant*

$$\rho_k(x) \geq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad supp(\rho_k) \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right) \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x)\, dx = 1\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Théorème 3.4. *Soit* $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *une suite régularisante. Alors*

(i) *Pour toute fonction* $f \in C(\mathbb{R}^N)$*, on a*

$$\rho_k * f - f \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^N.$$

(ii) *Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. (i) Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$.

Comme $C(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors d'après la proposition 2.6, $\rho_k * f$ est défini et continu sur $\mathbb{R}^N$.

Soit K un compact fixé de $\mathbb{R}^N$. Montrons que $\rho_k * f - f \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur K.

Comme f est uniformément continue sur K, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (δ dépend de K et ε) tel que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K, \ \ \forall y \in B(0, \delta).$$

En utilisant la commutativité du produit de convolution et le fait que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\, dy = 1$, on obtient

$$\rho_k * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(f(x-y) - f(x)\Big)\rho_k(y)\, dy = \int_{B\left(0,\, \frac{1}{k}\right)} \Big(f(x-y) - f(x)\Big)\rho_k(y)\, dy.$$

Donc pour $k > \dfrac{1}{\delta}$ et $x \in K$, on a

$$|\rho_k * f(x) - f(x)| < \varepsilon \int_{B\left(0,\, \frac{1}{k}\right)} \rho_k(y)\, dy = \varepsilon.$$

(ii) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Comme $C_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad t.q. \quad \|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

D'une part, comme $\rho_k * (f - f_1) = \rho_k * f - \rho_k * f_1$, alors

$$\rho_k * f - f = \big[\rho_k * (f - f_1)\big] + \big[\rho_k * f_1 - f_1\big] + \big[f_1 - f\big].$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\rho_k * (f - f_1)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq 2\|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (i) on a $\rho_k * f_1 \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f_1$ uniformément sur tout compact et comme

$$supp(\rho_k * f_1) \subset \overline{supp(\rho_k) + supp(f_1)} = supp(\rho_k) + supp(f_1) \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right)} + supp(f_1) \subset \overline{B(0,1)} + supp(f_1) = K$$

où K est un compact fixe, alors

$$\|\rho_k * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\rho_k * f_1(x) - f_1(x)| \left(\int_K dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On déduit que

$$\limsup_{k\to+\infty} \|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

C'est à dire

$$\lim_{k\to+\infty} \|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Le théorème est démontré. $\square$

3.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$

Théorème 3.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve. Elle va se faire par troncature et régularisation.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, alors il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

Donc, $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ et d'après la proposition 2.8, $\rho_k * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par suite, comme $C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, alors d'après le théorème 3.4,

$$\|\rho_k * g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $u_k = (\rho_k * g)_{|\Omega}$ la restriction de $\rho_k * g$ sur Ω.

En utilisant le fait que

$$supp(\rho_k * g) \subset supp(\rho_k) + supp(f_1) \subset \overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right)} + supp(f_1) \subset \Omega \qquad \text{pour } k \text{ assez grand,}$$

alors $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$ pour k assez grand et de plus

$$\|u_k - f_1\|_{L^p(\Omega)} \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, pour k assez grand, on a

$$\|u_k - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k - f_1\|_{L^p(\Omega)} + \|f_1 - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon.$$

D'où le résultat. $\square$

4 Réflexivité-Séparabilité-Dual de $L^p(\Omega)$

Les résultats qui suivent concernent la réflexivité, la séparabilité et le dual de $L^p(\Omega)$. Pour les démonstrations, voir [4].

Théorème 4.1. *L'espace $L^p(\Omega)$ est*

(i) *réflexif pour $p \in]1, +\infty[$,*

(ii) *séparable pour $p \in [1, +\infty[$.*

Remarque 4.2.

(i) *Les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

(ii) *L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Théorème 4.3. ***(Théorème de Représentation de Riesz)***

Soient $p \in [1, +\infty[$ et p' son exposant conjugué. Alors, pour tout $\varphi \in (L^p(\Omega))'$, il existe un unique $u \in L^{p'}(\Omega)$ tel que

$$< \varphi, f >= \int_\Omega f(x)u(x)\, dx \qquad \text{pour tout } f \in L^p(\Omega).$$

De plus, $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$.

Remarque 4.4.

(i) *Le dual de* $L^p(\Omega)$ *s'identifie à* $L^{p'}(\Omega)$ *si* $p \in [1, +\infty[$.

(ii) *Le dual de* $L^\infty(\Omega)$ *contient strictement* $L^1(\Omega)$ *et s'identifie à l'espace des mesures de Radon.*

Chapitre 3

Espaces de Sobolev

Tout le long du chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

1 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$.*

On appelle espace de Sobolev l'ensemble

$$W^{m,p}(\Omega) = \begin{cases} \Big\{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ \ \forall \alpha = (\alpha_1 \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \, t.q.\, |\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \leq m\Big\} & si \ \ m \in \mathbb{N}^*, \\ L^p(\Omega) & si \ \ m = 0. \end{cases}$$

Si $p = 2$, on note $H^m(\Omega)$ au lieu de $W^{m,2}(\Omega)$.

On munit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivante

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & si\ 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

Remarque 1.1. *Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors $D^\alpha u$ est la dérivée de u au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.

Remarque 1.2. *La norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme suivante*

$$\|u\|_{1,W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition 1.2. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. On a*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

avec injections continues.

Preuve. L'inclusion ensembliste est évidente. Soit maintenant $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $supp(u) \subset K$. D'où

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &\leq (mes(K))^{1/p} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq (mes(K))^{1/p} \sum_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|, \end{aligned}$$

Par suite, l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ est continue.

D'autre part, on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

D'où la continuité de l'injection de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$. $\square$

Proposition 1.3. *L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u,\, v \in H^m(\Omega).$$

Preuve. Il est clair que la norme de $H^m(\Omega)$ provient du produit scalaire ci-dessus.

Il suffit de montrer que $H^m(\Omega)$ est complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^m(\Omega)$. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour tout $|\alpha| \leq m$) sont des suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. Alors

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u & \text{dans } L^2(\Omega) \\ D^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Or la continuité de l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ assure que $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme la dérivation D^α est continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $D^\alpha u_n \rightharpoonup D^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ce qui implique que $D^\alpha u = v \in L^2(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \qquad \text{dans } H^m(\Omega).$$

Ceci termine la preuve. $\square$

On démontre de la même façon le résultat suivant.

Proposition 1.4. *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$.*

Beaucoup de propriétés de l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ peuvent être obtenues en le considérant comme un sous espace femé de l'ensemble $(L^p(\Omega))^\Gamma$ qui est le produit cartésien d'espaces $L^p(\Omega)$ avec

$$\Gamma = Card\{\alpha \in \mathbb{N}^N;\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Pour simplifier la notation on pose $L^p_\Gamma(\Omega) = (L^p(\Omega))^\Gamma$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ et on le munit de la norme suivante.

$$\|u\|_{L^p_\Gamma(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\Gamma} \|u_j\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \displaystyle\max_{1\leq j\leq\Gamma} \|u_j\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Ceci va nous permettre de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.5. *Soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est*

(i) *réflexif pour $p \in]1, +\infty[$,*

(ii) *séparable pour $p \in [1, +\infty[$.*

Remarque 1.3. *Si Ω est borné, alors $C^m(\overline{\Omega}) \subset W^{m,p}(\Omega)$, mais $C^m(\overline{\Omega})$ n'est pas réflexif ; la raison pour laquelle lors des études des équations aux dérivées partielles on utilise $W^{m,p}(\Omega)$ au lieu de $C^m(\overline{\Omega})$.*

La démonstration de la proposition 1.5 nécessite le lemme suivant.

Lemme 1.6.

(i) *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach réflexif est réflexif.*

(ii) *Tout sous ensemble d'un espace métrique séparable est séparable.*

Preuve de la proposition 1.5. On considère l'opérateur P suivant

$$P: \ W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^p_\Gamma(\Omega)$$

$$u \longrightarrow (D^\alpha u)_{0\leq|\alpha|\leq m}$$

L'opérateur P est évidemment linéaire, de plus on a

$$\|P(u)\|_{L^p_\Gamma(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

D'où P est une isométrie et un isomorphisme de $W^{m,p}(\Omega)$ dans le sous espace vectoriel $W = P\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$ de $L^p_\Gamma(\Omega)$.

(i) Soit $p \in]1,+\infty[$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif et par suite $L^p_\Gamma(\Omega)$ l'est aussi. D'autre part, comme $W^{m,p}(\Omega)$ est complet et alors W est un fermé de $L^p_\Gamma(\Omega)$ qui est réflexif et alors W est aussi réflexif d'après le lemme 1.6. Par conséquent, $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$ est réflexif.

(ii) Soit $p \in [1,+\infty[$. Alors, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable, c'est à dire il admet une suite dense et alors il en est de même pour $L^p_\Gamma(\Omega)$. Comme W est un sous ensemble de $L^p_\Gamma(\Omega)$ qui est séparable, alors W est aussi séparable d'après le lemme 1.6. D'où, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

La preuve est terminée. $\square$

1.2 L'espace dual de $W^{m,p}(\Omega)$

Pour caractériser le dual de $W^{m,p}(\Omega)$, on commence par déterminer le dual de $L^p_\Gamma(\Omega)$ puisque $W^{m,p}(\Omega)$ est isomorphe à W qui est un sous espace vectoriel de $L^p_\Gamma(\Omega)$.

Lemme 1.7. *Soient $p \in [1,+\infty[$ et p' son exposant conjugué. Soit l'application*

$$T: \ L^{p'}_\Gamma(\Omega) \longrightarrow (L^p_\Gamma(\Omega))'$$

$$u \longrightarrow \ T(u): \ L^p_\Gamma(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie pour tout $u = (u_i)_{1\leq i\leq\Gamma} \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ par

$$< T(u), v >= \sum_{i=1}^{\Gamma} \int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx \qquad \textit{pour tout } v = (v_i)_{1\leq i\leq\Gamma} \in L^p_\Gamma(\Omega).$$

Alors, T est une isométrie et un isomorphisme de $L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ dans $(L_\Gamma^p(\Omega))'$.

Donc, l'espace dual $(L_\Gamma^p(\Omega))'$ est identifié à l'espace $L_\Gamma^{p'}(\Omega)$.

Preuve. La démonstration va se faire en deux étapes.

Etape 1. T est une isométrie.

Soient $u = (u_i)_{1\le i\le \Gamma} \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ et $v = (v_i)_{1\le i\le \Gamma} \in L_\Gamma^p(\Omega)$. Alors, $< T(u), v >$ est bien définie et T est évidemment linéaire. De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder respectivement pour les fonctions et les sommes finies, on a

$$\begin{aligned}
| < T(u), v > | &\le \sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v_i\|_{L^p(\Omega)} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|v_i\|_{L^p(\Omega)}^{p}\right)^{1/p} = \|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L_\Gamma^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où $T(u)$ est continue et comme elle est linéaire, alors c'est un élément de $(L_\Gamma^p(\Omega))'$ et

$$\|T(u)\|_{\left(L_\Gamma^p(\Omega)\right)'} \le \|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)}.$$

Maintenant pour montrer que

$$\|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)} \le \|T(u)\|_{\left(L_\Gamma^p(\Omega)\right)'},$$

on distingue deux cas.

• Si $p \in]1, +\infty[$.

Prenons $v = (v_i)_{1\le i\le \Gamma}$ avec $v_i = |u_i|^{p'-2} u_i$, alors $v \in L_\Gamma^p(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L_\Gamma^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|v_i\|_{L^p(\Omega)}^{p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\Gamma} \|u_i\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}\right)^{1/p} = \|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)}^{p'/p}.$$

Or

$$\begin{aligned}
| < T(u), v > | &= \sum_{i=1}^{\Gamma} \int_\Omega |u_i(x)|^{p'}\, dx = \|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)}^{p'} \\
&= \|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)} \|v\|_{L_\Gamma^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|u\|_{L_\Gamma^{p'}(\Omega)} \le \|T(u)\|_{\left(L_\Gamma^p(\Omega)\right)'}.$$

• Si $p = 1$.

Comme $\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} = \max\limits_{1\leq j\leq \Gamma}\|u_j\|_{L^\infty(\Omega)}$, alors il existe $j_0 \in [1,\Gamma]$ tel que $\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} = \|u_{j_0}\|_{L^\infty(\Omega)}$. D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure $|A|$ non nulle tel que

$$|u_{j_0}(x)| \geq \|u_{j_0}\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon = \|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Posons

$$v_{j_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{u_{j_0}(x)}{|u_{j_0}(x)|} & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et prenons $v = (0,\cdots,0,v_{j_0},0,\cdots,0)$. Alors, $v \in L^1_\Gamma(\Omega)$ et $\|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)} = \|v_{j_0}\|_{L^1(\Omega)} = |A|$. Par suite

$$\begin{aligned} < T(u), v > &= \int_\Omega u_{j_0}(x)v_{j_0}(x)\,dx = \int_A |u_{j_0}(x)|\,dx \\ &\geq \left(\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon\right)|A| = \left(\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} - \varepsilon\right)\|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$< T(u), v > \geq \|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)}\|v\|_{L^1_\Gamma(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^\infty_\Gamma(\Omega)} \leq \|T(u)\|_{\left(L^1_\Gamma(\Omega)\right)'}.$$

Il résulte que

$$\|T(u)\|_{\left(L^p_\Gamma(\Omega)\right)'} = \|u\|_{L^{p'}_\Gamma(\Omega)} \qquad \forall p \in [1,+\infty[;$$

c'est à dire que T est une isométrie.

Etape 2. T est surjective.

Soit $f \in (L^p_\Gamma(\Omega))'$. Alors, pour tout $i \in [1,\Gamma]$, l'application définie sur $L^p(\Omega)$ par

$$v_i \longrightarrow < f, (0,\cdots,0,v_i,0,\cdots,0) >$$

est linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, c'est à dire un élément de $(L^p(\Omega))'$. D'où, il existe $u_i \in L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$< f, (0,\cdots,0,v_i,0,\cdots,0) > = \int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx.$$

Par suite, on obtient pour tout $v = (v_1, \cdots, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_\Gamma) \in L^p_\Gamma(\Omega)$

$$< f, v >= \sum_{1 \leq i \leq \Gamma} \int_\Omega u_i(x) v_i(x)\, dx.$$

On déduit que $T(u) = f$ où $u = (u_1, \cdots, u_\Gamma) \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$.

La preuve est terminée. □

Théorème 1.4. *Soient $p \in [1, +\infty[$, p' son exposant conjugué et $m \in \mathbb{N}^*$.*

Pour tout élément f de $(W^{m,p}(\Omega))'$, il existe une famille $(f_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ telle que

$$< f, u >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)}= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx, \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Preuve. Soient $f \in (W^{m,p}(\Omega))'$ et P l'opérateur introduit lors de la démonstration de la proposition 1.5. Alors $f \circ P^{-1}$ est une forme linéaire continue du sous espace fermé $W = P\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$ de $L^p_\Gamma(\Omega)$. Donc, d'après le théorème de Hahn Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur $L^p_\Gamma(\Omega)$, c'est à dire $\widetilde{f} \in (L^p_\Gamma(\Omega))'$ et $\widetilde{f}_{|W} = f \circ P^{-1}$.

Posons $(f_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} = T^{-1}(\widetilde{f}) \in L^{p'}_\Gamma(\Omega)$ où T est l'application introduite dans le lemme 1.7. Alors, pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, on a $P(u) = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in W$ et

$$\begin{aligned} < f, u >=< f, p^{-1}\left((D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m}\right) >=< \widetilde{f}, (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} > &=< T\left((f_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m}\right), (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} > \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

Remarque 1.5. *Soit $f \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$. D'après le théorème 1.4, il existe $f_0, \cdots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned} < f, u >_{(W^{1,p}(\Omega))', W^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega f_0(x) u(x)\, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega f_0(x) u(x)\, dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) u(x)\, dx \\ &=< f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, u >_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc, l'application $u(\in \mathcal{D}(\Omega)) \longrightarrow < f, u >_{(W^{1,p}(\Omega))', W^{1,p}(\Omega)}$ *est un élément de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et donc on peut définir une application* $F : \left(W^{1,p}(\Omega)\right)' \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *par*

$$< F(f), u >=< f, u > \quad \textit{pour tout } f \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)' \textit{ et pour tout } u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

F *est évidemment linéaire continue mais pas nécessairement injective.*

Si par exemple $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{1,p}(\Omega)$*, alors* F *est injective et on peut identifier* $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$ *à un sous espace de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *; mais ceci en général n'est pas le cas. D'où, la nécessité de définir un sous espace* V *de* $W^{1,p}(\Omega)$ *tel que* $\mathcal{D}(\Omega)$ *soit dense dans* V*.*

2 Espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$*.*

On appelle $W_0^{m,p}(\Omega)$ *(respectivement* $H_0^m(\Omega)$*) l'adhérence de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$ *(respectivement* $H^m(\Omega)$*).*

Remarque 2.1. *Par construction,* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *est un sous espace fermé de* $W^{m,p}(\Omega)$*.*

La question qui se pose est ce qu'on peut avoir $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$? Le théorème suivant donne une réponse dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 2.2. *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$*.*

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$*, c'est à dire* $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$*.*

Preuve. Elle va se faire par troncature et régularisation.

Etape 1**. Troncature**

Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} \xi(x) = 1 & \text{si } \|x\| \leq 1, \\ 0 \leq \xi(x) \leq 1 & \text{si } 1 < \|x\| < 2, \\ \xi(x) = 0 & \text{si } \|x\| \geq 2. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\xi_n(x) = \xi(x/n).$$

Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. On pose $u_n = \xi_n u$. Alors, $u_n \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et est à support compact.

On affirme que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. En raison de simplicité, On se limite au cas où $m = 1$.

En effet, $u_n(x) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u(x)\, p.p.$ dans $\mathbb{R}^N$ et $|u_n(x) - u(x)|^p \leq 2^p|u(x)|^p$. Donc, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x) - u(x)|^p \, dx \longrightarrow 0.$$

D'où, $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

D'autre part, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u + \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\xi_n$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Comme précédemment on a $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\xi_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u\right|^p dx \leq \frac{1}{n^p} \left\|\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)};$$

d'où, $\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} u \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Par suite, pour tout $1 \leq i \leq N$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. Régularisation

D'après la première étape, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \, t.q. \, \|u_{n_0} - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_k = u_{n_0} * \rho_k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et elle vérifie

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - u_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

En outre, pour tous $1 \leq i \leq N$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_{n_0}}{\partial x_i} * \rho_k;$$

d'où, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{n_0}}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Par suite

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*,\, \forall k \geq k_0,\;\; \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il résulte qu'il existe une suite $v_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists k_0 \in \mathbb{N}^*,\, \forall k \geq k_0,\;\; \|v_k - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|v_k - u_{n_0}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u_{n_0} - u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon.$$

D'où la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Le résultat suivant donne une caractérisation des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f donnée par*

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i2\pi xy} f(x)\, dx.$$

Alors, $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si l'application $y \to \|y\|\widehat{f}(y)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Dans ce cas, on a

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left\|(1 + 4\pi^2\|y\|^2)^{1/2}\widehat{f}(y)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve. Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc, d'après le théorème de Plancherel,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

et

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{\nabla f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On affirme que

$$\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y\widehat{f}(y).$$

En effet, comme $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Donc

$$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\|\nabla f_n - \nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{\nabla f_n} - \widehat{\nabla f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite, il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ telle que

$$\widehat{f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\widehat{\nabla f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widehat{\nabla f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Or en utilisant le fait que $f_{n_k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors une simple intégration par partie donne

$$\widehat{\nabla f}_{n_k}(y) = 2i\pi y \widehat{f}_{n_k}(y).$$

Et comme

$$2i\pi y \widehat{f}_{n_k}(y) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 2i\pi y \widehat{f}(y) \;\; p.p.\, y \in \mathbb{R}^N,$$

alors

$$\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y \widehat{f}(y).$$

D'où, $y\widehat{f}(y) \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{\nabla f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(y)|^2\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} 4\pi^2 \|y\|^2 |\widehat{f}(y)|^2\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + 4\pi^2\|y\|^2\right) |\widehat{f}(y)|^2\, dy.
\end{aligned}$$

Inversement, supposons que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\|y\|\widehat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Comme f est une distribution tempérée, alors

$$\widehat{\nabla f}(y) = 2i\pi y \widehat{f}(y).$$

Donc, $\widehat{\nabla f} \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$, d'où $\nabla f \in L^2_N(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Proposition 2.3. *Soit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Si on désigne par $\widetilde{u}$ son prolongement par 0 en dehors de Ω, c'est à dire*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si\ \ x \in \Omega, \\ 0 & si\ \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

alors $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il est évident que son prolongement $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de plus on a

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Ainsi l'application P définie par

$$P: \ \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)(\supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$$

$$u \longrightarrow \widetilde{u}$$

est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie induite par $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$, alors P se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{P}$ sur $W_0^{m,p}(\Omega)$, c'est à dire

$$\widetilde{P}: \ W_0^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$u \longrightarrow \widetilde{P}(u)$$

où $\widetilde{P}(\varphi) = P(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Soit $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{m,p}(\Omega).$$

Donc

$$\widetilde{P}(u_n) = P(u_n) = \widetilde{u}_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u) \quad \text{dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

D'où

$$\widetilde{u}_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u) \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Par suite, on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ telle que

$$\widetilde{u}_{n_k}(x) \underset{k\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{P}(u)(x) \;\; p.p. x \in \mathbb{R}^N.$$

D'où

$$\widetilde{P}(u)(x) = \begin{cases} u(x) & p.p \;\; x \in \Omega, \\ 0 & p.p \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Il résulte que $\widetilde{P}(u) = \widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Remarque 2.3. *Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, alors*

$$\forall |\alpha| \leq m, \quad D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u} \quad \text{au sens des distributions}$$

et

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Remarque 2.4. *En général, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est à dire $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$. L'égalité dépend fortement de la taille de la frontière $\partial\Omega$.*

Exemple 2.1. *On se place dans le cas où $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$.*

On considère la fonction constante u définie par $u(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$. Alors, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$; mais $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.

En effet, supposons que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors d'après la proposition 2.3, $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Or pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$< (\widetilde{u})', \varphi >= - < \widetilde{u}, \varphi' >= - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u}(x)\varphi'(x)\, dx = - \int_0^1 \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) - \varphi(1) =< \delta_0 - \delta_1, \varphi > .$$

D'où, $(\widetilde{u})' = \delta_0 - \delta_1$ qui ne peut pas être identifiée à une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ (au sens où il n'existe pas une fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ telle que $< \delta_0 - \delta_1, \psi >= \int_{\mathbb{R}} g(x)\psi(x)\, dx$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Ceci est contradictoire avec le fait que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.5. *Dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ l'application*

$$u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}, \qquad p \in [1; +\infty[,$$

est une semi-norme, ce n'est pas une norme car elle s'annule sur les constantes qui sont des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$. Par contre sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ c'est une norme.

Plus exactement on a le résultat suivant dans le cas où Ω est un ouvert borné.

Proposition 2.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1;+\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors*

(i) Il existe une constante $C = C(\Omega, p)$ telle que

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(ii) Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ définie par $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$.

(iii) Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, $\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$ est une norme sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $W^{m,p}(\Omega)$ définie par $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$.

Preuve. (i) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Puisque Ω est un ouvert borné, alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$, $|x_i| < r$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

Soit $\widetilde{\varphi}$ le prolongement de φ par 0 en dehors de Ω. Alors, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $supp(\widetilde{\varphi}) \subset \Omega$.

Soit $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$, alors $\widetilde{\varphi}(x') = 0$ où $x' = (-r, x_2, \cdots, x_N)$ et

$$\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x') = \int_{-r}^{x_1} \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\, dt.$$

Par suite, grâce à l'inégalité de Hölder, on a

$$|\widetilde{\varphi}(x)| \leq (x_1 + r)^{1/p'} \left(\int_{-r}^{x_1} \left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\right|^p dt\right)^{1/p},$$

Comme p' est l'exposant conjugué de p, alors

$$|\widetilde{\varphi}(x)|^p \leq (2r)^{p-1} \int_{-r}^{x_1} \left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\right|^p dt \leq (2r)^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_N)\right|^p dt.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{\varphi}(x)|^p\, dx_2 \cdots dx_N \leq (2r)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x)\right|^p dx.$$

Et comme $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x_1, \cdots, x_N) = 0$ pour $|x_1| \geq r$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{\varphi}(x)|^p\, dx = \int_{-r}^{r} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{\varphi}(x)|^p\, dx_2 \cdots dx_N\right) dx_1 \leq (2r)^p \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}(x)\right|^p dx.$$

Par suite

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq (2r)^p \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^p \, dx.$$

D'où, l'inégalité

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq (2r)^p \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right|^p \, dx.$$

(ii) Il suffit de montrer la première propriété de la norme, les autres propriétés sont faciles à vérifier.

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\|u\|_{1,p,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'où, $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$. Par suite, $\nabla u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\Omega)$ et donc, d'après (i), $u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^p(\Omega)$, ce qui donne $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d'où $u = 0$ $p.p.$ dans Ω.

Pour l'équivalence des deux normes, on utilise (i) et la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour obtenir

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (1 + C^p)^{1/p} \|u\|_{1,p,\Omega} \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(iii) On suit le même raisonnement de (ii) en utilisant (par récurrence) le fait que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C_2 \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \cdots \leq C_m \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|^p_{L^p(\Omega)} = C_m \|u\|^p_{m,p,\Omega}.$$

On déduit en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$ que

$$\|u\|_{m,p,\Omega} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{m,p,\Omega} \quad \text{pour tout } u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

La démonstration est terminée. □

2.2 L'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$

Remarque 2.6. *L'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ sera en général distinct de celui de $W^{m,p}(\Omega)$ puisque $W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneq W^{m,p}(\Omega)$.*

Notation.

L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ étant muni de la topologie induite par $W^{m,p}(\Omega)$; on note par

$$(W_0^{m,p}(\Omega))' = W^{-m,p'}(\Omega) \;\text{ et }\; (H_0^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega).$$

Théorème 2.7. *Soient $p \in [1,+\infty[$, p' son exposant conjugué et $m \in \mathbb{N}^*$.*

Il existe une application linéaire continue injective de $W^{-m,p'}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui permet d'identifier $W^{-m,p'}(\Omega)$ à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

De plus, pour tout élément f de $W^{-m,p'}(\Omega)$, il existe une famille $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m}$ telle que

$$f_\alpha \in L^{p'}(\Omega) \;\; et \;\; f = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha$$

et tout élément f donné par la formule précédente s'identifie à un élément de $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Preuve. Soit $f \in W^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))'$ donc elle est une forme linéaire continue sur $W_0^{m,p}(\Omega)$, sous espace fermé de $W^{m,p}(\Omega)$. D'après le théorème de Hahn Banach elle se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur $W^{m,p}(\Omega)$. Il existe donc une famille $(f_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L_\Gamma^{p'}(\Omega)$ ($\Gamma = Card\{\alpha \in \mathbb{N}^N;\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$) telle que

$$< \widetilde{f}, u >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx, \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

En particulier pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} < \widetilde{f}, \varphi >_{(W^{m,p}(\Omega))', W^{m,p}(\Omega)} = < f, \varphi >_{W^{-m,p'}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} < f_\alpha, D^\alpha \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} < (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Donc, l'application $\varphi(\in \mathcal{D}(\Omega)) \longrightarrow < f, \varphi >_{W^{-m,p'}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)}$ est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc on peut définir une application $\tau :\ W^{-m,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ par

$$< \tau(f), \varphi > = < f, \varphi > \quad \text{ pour tout } f \in W^{-m,p'}(\Omega) \text{ et pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

C'est à dire, $\tau(f)$ est la restriction de $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

τ est évidemment linéaire. Elle est continue car si une suite $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} 0$ dans $W^{-m,p'}(\Omega)$, c'est à dire

$$< f_n, \varphi > \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^{m,p}(\Omega),$$

alors

$$< \tau(f_n), \varphi > = < f_n, \varphi > \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ce qui veut dire que $\tau(f_n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\rightharpoonup} 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

τ est injective. En effet, soit $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ telle que $\tau(f) = 0$, alors

$$< \tau(f), \varphi >=< f, \varphi >= 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\Omega)$, alors

$$< f, u >= 0 \qquad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

C'est à dire que f est identiquement nulle dans $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Réciproquement, si $f = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha$ avec $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ alors f est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Par suite, $f = \tau(g)$ où g est le prolongement linéaire continue de f sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ défini par

$$< g, u >= \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

3 Inclusions de Sobolev

le but de ce paragraphe est d'établir des inégalités qui permettent de plonger l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ dans d'autres espaces comme L^q et C^k. Ces inclusions dépendent de la position de p par rapport à la dimension N. Plus exactement trois domaines vont être distingués, $p \in [1, N[$, $p = N$ et $p \in]N, +\infty]$.

On se place dans le cas où $p \in [1, N[$.

S'il existe des constantes $C > 0$ (C est indépendante de u) et $q \in [1, +\infty[$ telles que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a l'estimation

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

alors q n'est pas arbitraire, il dépend de p et de N.

En effet, soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Posons pour $\lambda > 0$,

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

c'est à dire

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda^{1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où nécessairement, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

On appelle $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ le conjugué de Sobolev de p (pour $p \in [1, N[$). On remarque que $p^* \in]p, +\infty[$.

Théorème 3.1. ***(Inégalité de Gagliardo-Nirenberg)***

Supposons $p \in [1, N[$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p et de N telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout } u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

Preuve. On distingue deux cas.

Cas 1. $p = 1$.

Dans ce cas, le conjugué de Sobolev $p^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour chaque $i = 1, \cdots, N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\, dy_i.$$

Donc

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\right| dy_i \leq \int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i.$$

D'où

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i\right)^{1/(N-1)}.$$

Intégrons cette inégalité par rapport à x_1 et utilisons l'inégalité de Hölder itérée à $(N-1)$ fonctions de la forme

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} |g_i|\, dx_1 \leq \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |g_i|^{p_i}\, dx_1\right)^{1/p_i},$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \le \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1 \right)^{1/(N-1)} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1 \right)^{1/(N-1)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1 \right)^{1/(N-1)} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i\, dx_1 \right)^{1/(N-1)}.$$

Posons

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1$$

et pour $i = 2, \cdots, N$,

$$I_i = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dx_1\, dy_i.$$

Alors, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme suivante

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \le \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)}.$$

Intégrons maintenant ceci par rapport à x_2 ; on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \le \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)}\, dx_2 = I_2^{1/(N-1)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} I_i^{1/(N-1)}\, dx_2.$$

Appliquons de nouveau l'inégalité de Hölder itérée, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \le I_2^{1/(N-1)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i\, dx_2 \right)^{1/(N-1)}$$
$$= I_2^{1/(N-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} I_1\, dx_2 \right)^{1/(N-1)} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i\, dx_2 \right)^{1/(N-1)}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, y_2, x_3, \cdots, x_N)\|\, dx_1\, dy_2 \right)^{1/(N-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1\, dx_2 \right)^{1/(N-1)}$$
$$\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N)\|\, dx_1\, dx_2\, dy_i \right)^{1/(N-1)}.$$

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1dx_2 \le \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(x)\|\, dx_1dx_2\right)^{2/(N-1)} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla u(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N)\|\, dx_1dx_2dy_i\right)^{1/(N-1)}.$$

Puis on intègre par rapport à $x_3, \cdots, x_N$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx &\le \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dx_1 \cdots dy_i \cdots dx_N\right)^{1/(N-1)} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\|\, dx\right)^{1/(N-1)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\|\, dx\right)^{N/(N-1)}\end{aligned}$$

qui est la majoration voulue pour $p = 1$.

Cas 2. $p \in]1, N[$.

On considère la fonction $|u|^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Alors, $|u|^\alpha \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ et on a $\nabla(|u|^\alpha) = \alpha |u|^{\alpha-2} u \nabla u$. Par suite en utilisant le premier cas on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha N/(N-1)}\, dx\right)^{(N-1)/N} &\le \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(|u|^\alpha)(x)\|\, dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha-1} \|\nabla u\|\, dx \\ &\le \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(\alpha-1)/(p-1)}\, dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^p\, dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

On prend $\alpha = \dfrac{p(N-1)}{N-p} > 1$, alors $\dfrac{\alpha N}{N-1} = \dfrac{p(\alpha-1)}{p-1} = \dfrac{pN}{N-p} = p^*$. Donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, dx\right)^{(N-1)/N-(p-1)/p} \le \frac{p(N-1)}{N-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $\dfrac{N-1}{N} - \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{p^*}$, alors

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{p(N-1)}{N-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ceci termine la preuve. □

Théorème 3.2. *(**Estimation pour** $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$)*

Supposons $p \in [1, N[$. Alors,

(i) il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p et de N telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

En particulier

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

(ii) *Pour tout* $q \in [p, p^*]$,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

Preuve. (i) Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

D'après le théorème 3.1, on a pour tous $n,\ m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et par suite

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Or la continuité de l'injection $L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ assure que $u_n \rightharpoonup v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ faible, d'où nécessairement $v = u$. D'autre part, d'après le théorème 3.1, on a

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

(ii) Soit $q \in [p, p^*]$, alors il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors d'après (i) $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et donc par l'inégalité d'interpolation

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Par suite, d'après (i)

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Ce qui complète la preuve. $\square$

Théorème 3.3. *(**Estimation pour** $W^{1,p}(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, N[$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p, N et Ω telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

La démonstration nécessite le théorème de prolongement suivant.

Théorème 3.4. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe un opérateur de prolongement*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

linéaire, tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(i) $Pu_{|\Omega} = u$,

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

où C dépend seulement de Ω.

Preuve du théorème 3.3. On introduit l'opérateur de prolongement du théorème 3.4

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Alors, en utilisant le théorème 3.2, on obtient

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Pu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Ce qui termine la preuve. □

Théorème 3.5. ***(Estimation pour $W_0^{1,p}(\Omega)$ - Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, N[$. Alors, pour tout $q \in [1, p^*]$, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p, N, q et Ω telle que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Preuve. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Donc, en prolongeant u_n par 0 en dehors de Ω, on obtient

$$\widetilde{u_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par suite, comme $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue (d'après le théorème 3.2), alors

$$\widetilde{u_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{dans } L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

et

$$\|\widetilde{u_n}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|\nabla\widetilde{u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_1\|\widetilde{\nabla u_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci dessus, on obtient

$$\|\widetilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C_1\|\widetilde{\nabla u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme Ω est borné, alors pour tout $1 \leq q \leq p^*$, $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection continue (d'après le théorème 1.5 du deuxième chapitre) et donc

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

La démonstration est terminée. $\square$

Théorème 3.6. *Supposons $p = N$. Alors,*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N) \ \ \forall q \in [1, +\infty[$$

avec injection continue.

Preuve. Soit $q \in [1, +\infty[$, alors il existe $\varepsilon \in]0, N-1]$ tel que $q < \dfrac{N(N-\varepsilon)}{\varepsilon}$.
On définit p_ε^* par $\dfrac{1}{p_\varepsilon^*} = \dfrac{1}{p_\varepsilon} - \dfrac{1}{N}$; où $p_\varepsilon = N - \varepsilon \in [1, N[$. Donc $q \in [1, p_\varepsilon^*[$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur $K \subset supp(\varphi)$.
Soit $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Comme φu est à support compact, alors $L^N(supp(\varphi u)) \hookrightarrow L^r(supp(\varphi u))$ avec injection continue pour tout $1 \leq r \leq N$ et par suite $\varphi u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq r \leq N$. En particulier, $\varphi u \in W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$.
En utilisant les injections continues $L^{p_\varepsilon^*}(K) \hookrightarrow L^q(K)$ (car $1 \leq q < p_\varepsilon^*$), $W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_\varepsilon^*}(\mathbb{R}^N)$ et $L^N(supp(\varphi u)) \hookrightarrow L^{p_\varepsilon}(supp(\varphi u))$ (car $1 \leq p_\varepsilon < N$), on obtient

$$\|u\|_{L^q(K)} = \|\varphi u\|_{L^q(K)} \leq C\|\varphi u\|_{L^{p_\varepsilon^*}(K)} \leq C\|\varphi u\|_{L^{p_\varepsilon^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|\varphi u\|_{W^{1,p_\varepsilon}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|\varphi u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où le résultat. $\square$

Théorème 3.7. ***(Théorème de Morrey)***

Supposons $p > N$. Alors,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in]N, +\infty[$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x,\ y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et C est une constante qui dépend seulement de p et N.

Preuve. Si $p = +\infty$, on a d'après la proposition 1.2

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$$

avec injection continue.

Si $p \in]N, +\infty[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On montre qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x,\ y \in \mathbb{R}^N.$$

Soient $r > 0$ et P_r un pavé de $\mathbb{R}^N$ de côté r contenant 0 et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Soit $z \in P_r$, alors d'après la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| = \int_0^1 \nabla\varphi(tz).z\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz) z_i\, dt$$

et donc

$$|\varphi(z) - \varphi(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz) \right| |z_i|\, dt \leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz) \right| dt.$$

Par suite

$$\int_{P_r} |\varphi(z) - \varphi(0)|\, dz \leq r \int_{P_r} \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz) \right| dt\, dz \leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 dt \int_{P_r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tz) \right| dz \leq r \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right| dy.$$

Comme

$$\left| \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - r^N \varphi(0) \right| = \left| \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \int_{P_r} \varphi(0)\, dz \right| \leq \int_{P_r} |\varphi(z) - \varphi(0)|\, dz,$$

alors

$$\begin{aligned}
\left| r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \varphi(0) \right| &\le r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right| dy \\
&\le r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{P_{tr}} dy \right)^{1/p'} \\
&= r^{1-N} \int_0^1 t^{-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} (tr)^{N/p'} \\
&= r^{1-N+N/p'} \int_0^1 t^{N/p'-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{P_{tr}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&\le r^{\alpha} \int_0^1 t^{N/p'-N}\, dt \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} \\
&= \frac{r^{\alpha}}{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

où p' est l'exposant conjugué de p et $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p} \in]0, 1[$.

Donc

$$\left| r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz - \varphi(0) \right| \le \frac{r^{\alpha}}{\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Posons

$$\overline{\varphi}_{P_r} = \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz = r^{-N} \int_{P_r} \varphi(z)\, dz.$$

C'est à dire $\overline{\varphi}_{P_r}$ est la moyenne de φ sur P_r.

On a donc

$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(0)| \le \frac{r^{\alpha}}{\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Prenons maintenant $x,\, y \in \mathbb{R}^N$ quelconques. Il existe alors un pavé de côté $r = \|x - y\|$ contenant x et y.

Considérons les translations suivantes

$$\psi(z) = \varphi(z + x) \quad \text{et} \quad \phi(z) = \varphi(z + y) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^N.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $\psi,\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, de plus

$$\nabla \psi(z) = \nabla \varphi(z + x) \;\; \text{et} \;\; \nabla \phi(z) = \nabla \varphi(z + y) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^N$$

et

$$\|\nabla \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'autre part, en utilisant le fait que pour tout $\delta \geq 0$, $mes(P_r) = mes(P_{r+\delta})$ et $\overline{\varphi}_{P_r} = \overline{\varphi}_{P_{r+\delta}}$, on a

$$\overline{\psi}_{P_r} = \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \psi(z)\,dz = \frac{1}{mes(P_r)} \int_{P_r} \varphi(z+x)\,dz = \frac{1}{mes(P_{r+\|x\|})} \int_{P_{r+\|x\|}} \varphi(z)\,dz = \overline{\varphi}_{P_{r+\|x\|}} = \overline{\varphi}_{P_r}.$$

Donc

$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(x)| = |\overline{\psi}_{P_r} - \psi(o)| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De la même façon, on montre que

$$|\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(y)| = |\overline{\phi}_{P_r} - \phi(o)| \leq \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{r^\alpha}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{P_r}| + |\overline{\varphi}_{P_r} - \varphi(y)| \\ &\leq \frac{2r^\alpha}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

On déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{2\|x-y\|^\alpha}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Maintenant soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par suite, il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$u_{n_k}(x) \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u(x) \;\; p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

D'où

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2\|x-y\|^\alpha}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p.\ x,\, y \in \mathbb{R}^N.$$

Montrons maintenant que l'injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est continue.

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$ et P_1 un pavé de côté 1 contenant x. Alors, comme

$$|\overline{\varphi}_{P_1} - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

alors

$$|\varphi(x)| \leq |\overline{\varphi}_{P_1}| + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{L^1(P_1)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Puisque l'injection $L^p(P_1) \hookrightarrow L^1(P_1)$ est continue, alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$|\varphi(x)| \leq C_1\|\varphi\|_{L^p(P_1)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_1\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\alpha}\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'où, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Maintenant pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on raisonne comme pécédemment c'est à dire en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ pour déduire que

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \;\; p.p.\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 3.8. *Il est important de remarquer que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, avec $p \in]N, +\infty[$, il existe une fonction $\dot{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ telle que $u = \dot{u}$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Autrement dit, on peut associer un représentant continu à tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $p \in]N, +\infty[$.*

Proposition 3.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in]N, +\infty[$. Alors*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Preuve. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Donc, en appliquant le théorème 3.7, u est aussi limite uniforme de la suite $(u_n)_n$. D'où le résultat. $\square$

Le théorème suivant généralise les inclusions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à celles de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 3.9. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

(i) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*(m)}(\mathbb{R}^N)$ *où* $\dfrac{1}{p^*(m)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *alors* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^N)$ *où k un entier tel que* $k < m - \dfrac{N}{p} \leq k + 1$,

avec injections continues.

Dans le cas où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, on a le résultat suivant.

Théorème 3.10. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a*

(i) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(m)}(\Omega)$ *où* $\dfrac{1}{p^*(m)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q_{loc}(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *alors* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ *où k un entier tel que* $k < m - \dfrac{N}{p} \leq k + 1$,

avec injections continues.

Si de plus l'ouvert Ω est borné, on a le résultat suivant dans le cas où $m = 1$.

Théorème 3.11. ***(Théorème de Rellich-Kondrachov)***

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On a

(i) *Si* $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

(ii) *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,

avec injections compactes.

Remarque 3.12. *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors,*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

avec injection compacte.

4 Trace - Dérivée normale

On sait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ mais pas dans $W^{m,p}(\Omega)$. Ainsi si on veut approcher des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ par des éléments de classe C^∞, on ne peut pas leur imposer d'être nuls sur la frontière $\partial\Omega$, on se contente uniquement d'une convergence dans $L^p(\Omega)$. D'où la nécessité de définir un autre espace dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On a les résultats suivants.

Théorème 4.1. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors, l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ des restrictions des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à $\overline{\Omega}$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 4.1. *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.*

(i) On appelle trace de φ sur $\partial\Omega$, la restriction de φ à $\partial\Omega$ définie par

$$\varphi_{|\partial\Omega}(\sigma) = \varphi(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

(ii) On appelle dérivée normale de φ sur $\partial\Omega$, l'application $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ définie par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\sigma) n_i(\sigma) = \nabla\varphi(\sigma).n(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \partial\Omega,$$

où $n(\sigma) = (n_1(\sigma), \cdots, n_N(\sigma))$ est le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ au point $\sigma \in \partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω.

(iii) Par récurrence, on définit la dérivée normale d'ordre $j \in \mathbb{N}$ par

$$\frac{\partial^j\varphi}{\partial n^j}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}}(\sigma)\right) n_i(\sigma) \quad \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

La question qui se pose maintenant : Peut-on définir la trace et les dérivées normales d'une fonction $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ et jusqu'à quel ordre ? La réponse est donnée par les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.2. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$. Alors, l'application γ_0 définie par*

$$\gamma_0 : \ \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

$$\varphi \longrightarrow \gamma_0\varphi = \varphi_{|\partial\Omega}$$

est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la topologie induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue notée encore γ_0 de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$. Donc, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

$\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega}$ s'appelle la trace de u sur $\partial\Omega$.

De plus le noyau de γ_0 est l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega\Big\}.$$

Théorème 4.3. *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Supposons $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, l'application $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{m-1})$ définie par*

$$\begin{aligned} \gamma :\ & \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow (L^p(\partial\Omega))^m \\ & \varphi \longrightarrow \gamma\varphi = (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \cdots, \gamma_{m-1}\varphi) = (\varphi_{|\partial\Omega}, \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial n^{m-1}}) \end{aligned}$$

est linéaire continue sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la topologie induite par celle de $W^{m,p}(\Omega)$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue notée encore γ de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $(L^p(\partial\Omega))^m$. Donc, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\gamma u\|_{(L^p(\partial\Omega))^m} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Pour tout $j \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial n^j}$ s'appelle la dérivée normale d'ordre j de u sur $\partial\Omega$.

De plus le noyau de γ est l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$. Autrement dit

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m,p}(\Omega);\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega\right\}.$$

Dans le cas où $p = 2$, on a les résultats suivants.

Définition 4.2. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. On définit alors*

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)) = Im(\gamma_0).$$

L'opérateur $\gamma_0 :\ H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ est alors linéaire continu et surjectif.

Proposition 4.3. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.*

Remarque 4.4. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$.*

Si $u \in H^2(\Omega)$, alors $u \in H^1(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ pour tout $i = 1, \cdots, N$. On peut donc non considérer seulement $\gamma_0(u)$ mais aussi $\gamma_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ qui sont des fonctions de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. En particulier, la dérivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ est un élément de $L^2(\partial\Omega)$.

4.1 Formules de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle coincide en dimension 1 avec la formule d'intégration par parties.

Dans la suite, on désigne par $n = (n_1, \cdots, n_N)$ le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$ la dérivée normale de u sur la frontière $\partial\Omega$.

Théorème 4.5. ***(Formule d'Ostrogradsky)***

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit F une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (un champ de vecteurs). Alors

$$\int_\Omega div(F(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} F.n\, d\sigma.$$

Corollaire 4.4. ***(Formule de Green classique)***

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ on a

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\, dx.$$

Remarque 4.6. *La formule de Green est une conséquence de la formule d'Ostrogradsky en prenant $F(x) = v(x)\nabla u(x)$ et en utilisant le fait que*

$$div\big(v(x)\nabla u(x)\big) = v(x)\Delta u(x) + \nabla u(x).\nabla v(x).$$

Théorème 4.7. ***(Formule de Green dans $H^1(\Omega)$)***

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions $u,\, v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, v\, n_i\, d\sigma - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Théorème 4.8. *(**Formule de Green dans** $H^2(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour toutes fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i v\,d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Et donc

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx.$$

Chapitre 4

Formulation Variationnelle

1 Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Soient f une fonction (ou bien une distribution) définie sur Ω et L un opérateur linéaire.

La question qui se pose, existe-t-il u tel que

$$Lu = f \quad \text{dans } \Omega?$$

Si u_0 est une solution particulière alors l'ensemble des solutions est un espace affine de la forme $\{u_0\} + W$ où W est l'espace vectoriel des solutions du problème homogène $Lu = 0$.

Pour avoir l'existence et l'unicité de la solution, on impose en plus de l'équation, des conditions aux limites ($C.L$) (c'est à dire sur le bord de Ω noté $\partial\Omega$). Il existe des conditions aux limites de natures très différentes, Dirichlet, Neumann, mixtes,$\cdots$.

On se ramène donc à des problèmes de type suivant

$$(P)\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ C.L & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'idée pour résoudre le problème (P) est d'introduire des espaces de Banach, X pour u et Y pour f de sorte que les éléments de X vérifient les $C.L$ et que l'application L soit un isomorphisme de X dans Y. Dans ce cas , la solution de (P) est donnée par $u = L^{-1}(f)$. Comme L est linéaire, pour montrer que c'est un isomorphisme il faut et il suffit de montrer que L est continue, $KerL = \{0\}$ et $ImL = Y$.

En pratique, on montre que L^{-1} est continue, c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_X \leq C\|Lu\|_Y \quad \forall u \in X. \qquad (R)$$

Ceci implique que $KerL = \{0\}$. En effet, si $u \in X$ tel que $Lu = 0$, alors $\|u\|_X = 0$ et par suite $u = 0$.

Pour montrer que L est surjective, il faut noter tout d'abord que puisque L est continue alors ImL est un fermé. En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de ImL, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $Lx_n = y_n$ et donc

$$\|x_n - x_m\|_X \leq C\|L(x_n - x_m)\|_Y = C\|y_n - y_m\|_Y \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}.$$

D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc il existe $x \in X$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans X. D'où, par la continuité de L, on a $Lx_n = y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Lx = y$, ce qui implique que $y \in ImL$.

Par suite, pour prouver que $ImL = Y$, il suffit de montrer que ImL est dense dans Y.

Il faut remarquer que pour montrer la relation (R), il suffit de la vérifier sur un sous ensemble F dense dans X. La raison pour laquelle on commence par montrer l'inégalité pour des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est en général dense dans X.

En conclusion, le problème d'existence de solutions du problème (P) se ramène à établir une majoration de type (R) ; une telle majoration est appelée estimation à priori.

Un exemple d'une telle méthode est le théorème de Lax-Milgram et ses applications.

2 Equation et inéquation variationnelles dans un Hilbert

On commence cette partie par le résultat suivant.

Théorème 2.1. ***(Théorème de Lax-Milgram)***

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(.,.)$ et soit a une forme bilinéaire sur $H \times H$ à valeurs *dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

(i) *a est continue, c'est à dire il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H,$$

(ii) *a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in H.$$

Alors, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) =< f, v > \quad \textit{pour tout } v \in H. \tag{1}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H, \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - < f, u >= \min\limits_{v \in H} \left[\dfrac{1}{2}a(v,v) - < f, v >\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Preuve. Elle va se faire en deux étapes.

Etape 1**.** L'existence et l'unicité.

Pour chaque $u \in H$, l'application $v \in H \longrightarrow a(u,v)$ est linéaire et continue, d'où c'est un élément de H' qu'on note Au. Comme a est linéaire par rapport à la première variable et est continue, alors l'application A est linéaire et continue de H dans H' puisqu'on a

$$| < Au, v > | = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \text{pour tous } u,\, v \in H,$$

et ceci implique que

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \text{pour tout } u \in H.$$

De plus, en utilisant la coercivité de a et la continuité de Au, on obtient

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) =< Au, u >_{H',H} \leq \|Au\|_{H'}\|u\|_H \quad \text{pour tout } u \in H.$$

Par suite,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{H'} \quad \text{pour tout } u \in H.$$

Donc, d'après l'introduction, A est injective et ImA est un fermé dans H'.

Pour montrer que A est surjective, il suffit de montrer que que ImA est dense dans H' (car H' est un Hilbert), ce qui revient à prouver que $(ImA)^{\perp} = \{0\}$.

Soit $u' \in (ImA)^{\perp}$, alors,

$$((u', Av))_{H'} = (\phi^{-1}(Av), \phi^{-1}(u'))_H = 0 \quad \text{pour tout } v \in H,$$

où ϕ est l'isomorphisme canonique de H dans H'. Par suite, en utilisant le fait que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Riesz-Fréchet, on obtient

$$0 = (\phi^{-1}(u'), \phi^{-1}(Av)) =< \phi\left(\phi^{-1}(Av)\right), \phi^{-1}(u') >=< Av, \phi^{-1}(u') > \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Prenons $v = \phi^{-1}(u')$, on obtient alors

$$0 =< Av, v >= a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Donc, $v = 0$ et par suite $u' = 0$. Par conséquent, $(ImA)^{\perp} = \{0\}$. En conclusion, A est un isomorphisme de H dans H' et ainsi on a l'existence et l'unicité de la solution du problème (1).

Etape 2**.** La caractérisation.

Supposons maintenant que a est symétrique. On considère la fonction F définie sur H par

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - < f, v > \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Montrons que F atteint son minimum sur H. Pour cela, on considère une suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est à dire $u_n \in H$ et $F(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \min_{v \in H} F(v) = d$. D'où,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \;\; F(u_n) \leq d + 1.$$

Or

$$F(u_n) \geq \frac{\alpha}{2} \|u_n\|^2 - \|f\| \|u_n\|,$$

d'où, nécessairement la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans H et comme H est réflexif (car c'est un Hilbert), alors on peut extraire une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} \omega \;\; \text{faiblement dans } H.$$

Or la fonction F est convexe et continue pour la topologie forte de H donc elle est $s.c.i$ pour la topologie faible et par suite

$$F(\omega) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}) = d.$$

Or $d = \min_{v\in H} F(v)$, d'où $F(\omega) = d$ et alors F atteint son minimum au point $\omega \in H$.

Montrons maintenant que $\omega = u$.

Tout d'abord, il faut noter que la fonction F est de classe C^1 et que

$$DF(v)(h) = \frac{1}{2}\Big[a(v,h) + a(h,v)\Big] - < f, h > \quad \text{pour tous } v,\ h \in H.$$

D'où, en utilisant le fait que a est symétrique,

$$DF(v)(h) = a(v,h) - < f, h > \quad \text{pour tous } v,\ h \in H.$$

Or ω est un minimum dans tout l'espace H, d'où $DF(\omega) = 0$ et donc

$$a(\omega, h) = < f, h > \quad \text{pour tout } h \in H.$$

Comme l'équation (1) admet une unique solution u, alors $\omega = u$. Ceci termine la preuve. □

Remarque 2.2.

(i) *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'équation* (1) *est équivalente à l'équation*

$$Au = f \quad \textit{dans } H \qquad (3)$$

où A est un isomorphisme de H dans H' défini par

$$< Au, v >= a(u,v) \quad \forall v \in H.$$

De plus, A^{-1} est continue de H' à valeurs dans H et vérifiant

$$\|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\| \quad \textit{pour tout } f \in H'.$$

D'où

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

L'équation (3) *est appelée équation variationnelle.*

(ii) *L'application* a *est une forme bilinéaire sur* $H \times H$*, on peut définir la forme conjuguée* a^* *de* a *par*

$$a^*(u, v) = a(v, u) \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H.$$

Puis, on associe à a^* *l'opérateur* $A^* \in \mathcal{L}(H, H')$ *appelé conjugué de* A *et défini par*

$$< A^*u, v >= a^*(u, v) = a(v, u) =< Av, u > \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H.$$

Alors, A^* *a les mêmes propriétés que* A*.*

Ceci nous permet de démonter le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Soit* H *un Hilbert sur* $\mathbb{R}$ *et soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* H *telle que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ *faiblement dans* H*. Alors,*

$$a(v, u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(v, u) \quad \textit{et} \quad a(u_n, v) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(u, v).$$

Preuve. Soient $u,\, v \in H$.

Comme $Av \in H'$, alors

$$a(v, u_n) =< Av, u_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < Av, u >= a(v, u).$$

De plus, comme $A^*v \in H'$, alors

$$a(u_n, v) =< Au_n, v >=< A^*v, u_n > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < A^*v, u >=< Au, v >= a(u, v).$$

Le lemme est prouvé. □

Remarque 2.3. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v$*, faiblement dans* H*, on n'a pas en général* $a(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(u, v)$*.*

Théorème 2.4. ***(Théorème de Stampacchia)***

Soit H *un espace de Hilbert sur* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire* $(.,.)$ *et soit* a *une forme bilinéaire sur* $H \times H$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

(i) a *est continue, c'est à dire il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \textit{pour tous } u,\, v \in H,$$

(ii) a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in H.$$

Soit K un convexe fermé non vide de H.

Alors, pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$a(u, v-u) \geq < f, v-u > \quad \text{pour tout } v \in K. \tag{4}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in K, \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min\limits_{v \in K} \left[\dfrac{1}{2}a(v,v) - < f, v > \right]. \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 2.5. *L'inéquation (4) est appelée inéquation variationnelle.*

Preuve du théorème 2.4. On commence comme lors de la preuve du théorème de Lax-Milgram.

(i) Pour tout $u \in H$, l'application $v \in H \longrightarrow a(u,v)$ est linéaire continue, alors c'est un élément de H' noté Au. L'opérateur A ainsi défini est évidemment linéaire et continue. D'autre part, comme $Au \in H'$, alors d'après le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un élément de H noté $\phi^{-1}(Au)$ tel que

$$a(u,v) = < Au, v > = (v, \phi^{-1}(Au)) = (\phi^{-1}(Au), v) \quad \text{pour tout } v \in H$$

où ϕ est l'isomorphisme canonique de H dans H'.

Soit maintenant $f \in H'$, en utilisant une autre fois le théorème de Riesz-Fréchet, on trouve

$$< f, v-w > = (\phi^{-1}(f), v-w) \quad \text{pour tous } v,\ w \in H.$$

Alors, l'inéquation variationnelle (4) devient : Trouver $u \in K$ tel que

$$(\phi^{-1}(Au), v-u) \geq (\phi^{-1}(f), v-u) \quad \text{pour tout } v \in K.$$

Ce qui équivaut à

$$(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Au) + u - u, v-u) \leq 0 \quad \text{pour tous } v \in K \text{ et } \lambda > 0,$$

et donc, d'après la caractérisation de la projection sur un convexe fermé,

$$u = P_K\Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Au) + u\Big) \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Soit $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{C^2}$. Considérons maintenant la fonction F définie de K dans K par

$$F(v) = P_K\Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av) + v\Big) \quad \text{pour tout } v \in K.$$

Comme la projection P_K est une contraction large et ϕ^{-1} et A sont linéaires, alors

$$\begin{aligned}
\|F(v_1) - F(v_2)\| &\leq \Big\|\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av_1) + v_1 - \Big(\lambda\phi^{-1}(f) - \lambda\phi^{-1}(Av_2) + v_2\Big)\Big\| \\
&= \Big\|v_1 - v_2 - \lambda\Big(\phi^{-1}(Av_1) - \phi^{-1}(Av_2)\Big)\Big\| \\
&= \Big\|v_1 - v_2 - \lambda\phi^{-1}\Big(A(v_1 - v_2)\Big)\Big\|
\end{aligned}$$

Comme A est continue, ϕ^{-1} est une isométrie et $(\phi^{-1}(Av), v) = a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \ \ \forall v \in H$, alors

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|^2 \leq \big(1 + \lambda^2 C^2 - 2\lambda\alpha\big)\|v_1 - v_2\|^2.$$

Comme $0 < \lambda < \dfrac{\alpha}{C^2}$, alors $0 < 1 + \lambda^2 C^2 - 2\lambda\alpha < 1$, d'où F est une contraction stricte sur K et par suite elle admet un unique point fixe $u \in K$, c'est à dire u est l'unique solution de l'inéquation variationnelle (4).

(ii) Supposons maintenant que a est symétrique.

Soit l'application $(.,.)_a$ définie de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(u, v)_a = a(u, v) \quad \text{pour tous } u,\ v \in H.$$

Alors, $(.,.)_a$ est un produit scalaire sur H. De plus, si on pose $\|u\|_a = \sqrt{(u, u)_a}$ pour tout $u \in H$. Alors

$$\alpha\|u\|^2 \leq \|u\|_a^2 \leq C\|u\|^2.$$

Donc, la norme $\|.\|_a$ est équivalente à la norme $\|.\|$ de H. Par suite, H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_a$.

Appliquons le théorème de Riesz-Fréchet, on obtient $w \in H$ tel que

$$< f, v >= (v, w)_a = a(v, w) = a(w, v) \quad \text{pour tout } v \in H.$$

Donc, d'après l'équation (4), on a

$$a(w-u, v-u) = (w-u, v-u)_a \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in K.$$

C'est à dire $u = P_K(w)$ (projection au sens du produit scalaire $(.,.)_a$). Ceci équivaut à

$$\|w-u\|_a = \min_{v\in K} \|w-v\|_a.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\|w-u\|_a^2 = \min_{v\in K} \frac{1}{2}\|w-v\|_a^2.$$

C'est à dire

$$\frac{1}{2}\|w\|_a^2 + \frac{1}{2}\|u\|_a^2 - (w,u)_a = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}\|w\|_a^2 + \frac{1}{2}\|v\|_a^2 - (w,v)_a\right].$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|u\|_a^2 - < f, u > = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}\|v\|_a^2 - < f, v >\right].$$

Par suite

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < f, u > = \min_{v\in K}\left[\frac{1}{2}a(v,v) - < f, v >\right].$$

Ceci termine la preuve. □

Remarque 2.6. *Supposons qu'on a les mêmes hypothèses du théorème de Stampacchia avec K un sous espace fermé. Alors en utilisant la caractérisation de la projection sur un sous espace vectoriel fermé, on a pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$a(u,v) = < f, v > \quad \textit{pour tout } v \in K.$$

De plus, si a est symétrique, u a la même caractérisation que celle du théorème de Stampacchia.

Cas important d'application du théorème de Lax-Milgram

Soient H et V deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$ tels que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ avec injections continues et denses. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $A \in \mathcal{L}(V, V')$ l'opérateur associé à a par le théorème de Lax-Milgram et A_H l'opérateur défini sur $D(A_H) = \{u \in V;\ Au \in H\}$ par

$$A_H u = Au \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

Il faut distinguer l'opérateur A qui est linéaire continu de V dans V' et l'opérateur A_H qui est linéaire de $D(A_H)$ dans H, mais pas nécessairement continu lorsque $D(A_H)$ est muni de la norme induite par celle de H ($D(A_H)$ est un sous espace vectoriel de H). En effet, on a

$$\|Au\|_{V'} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V,V')}\|u\|_V \ \text{ et } \ \|u\|_H \leq c_1\|u\|_V \quad \text{pour tout } u \in V.$$

et

$$\|Au\|_{V'} \leq c_2\|Au\|_H \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

Mais ceci n'implique pas que

$$\|A_H u\|_H = \|Au\|_H \leq k\|u\|_H \quad \text{pour tout } u \in D(A_H).$$

La situation change si l'on change de norme sur $D(A_H)$.

Proposition 2.2. *Sous les mêmes hypothèses précédentes on a*

(i) *L'opérateur A_H est bijectif de $D(A_H)$ dans H.*

(ii) *$D(A_H)$ est dense dans H et A_H est de graphe fermé, c'est à dire, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D(A_H)$ telle que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \textit{dans } H$$

et

$$Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \textit{dans } H,$$

alors, $u \in D(A_H)$ et $f = Au$.

(iii) *$D(A_H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire du graphe défini par*

$$(u,v)_{D(A_H)} = (u,v)_H + (Au, Av)_H \quad \textit{pour tous } u,\ v \in H.$$

(iv) *A_H est un isomorphisme de $\big(D(A_H), \|.\|_{D(A_H)}\big)$ dans H.*

Preuve. (i) Soit $f \in H \simeq H'$, d'où $f \in V'$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ tel que $Au = f$, d'où $Au \in H$ et alors $u \in D(A_H)$.

(ii) $a)$ Montrons que $[D(A_H)]^{\perp} = \{0\}$.

Soit $f \in [D(A_H)]^{\perp}$. Comme $f \in H \simeq H' \subset V'$ (H est l'espace pivot d'après la remarque 3.5 du premier chapitre), alors

$$< f, v >_{V',V} = (f, v)_H = 0 \quad \text{pour tout } v \in D(A_H),$$

Comme $f \in V'$, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ tel que $Au = f \in H$. Donc, $u \in D(A_H)$ et par suite

$$< f, u >_{V',V} = 0$$

D'où

$$< Au, u >_{V',V} = a(u, u) = 0.$$

Comme a est coercive sur $V \times V$, alors $u = 0$ et par suite $f = Au = 0$.

$b)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(A_H)$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } H$$

et

$$Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } H.$$

Comme $H \hookrightarrow V'$ avec injection continue alors

$$Au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } V'.$$

Comme A^{-1} est continue de V' dans V, alors

$$A^{-1}(Au_n) = u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A^{-1}f \quad \text{dans } V.$$

Donc, $u = A^{-1}f \in V$. D'où, $Au = f \in H$ et par suite $u \in D(A_H)$.

(iii) Il est évident que $(.,.)_{D(A_H)}$ est un produit scalaire. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $D(A_H)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans H et donc elles convergent dans H. En utilisant le fait que A_H est de graphe fermé, on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $D(A_H)$.

(iv) A_H est bijective d'après (i) et est linéaire. Montrons que A_H est continue de $D(A_H)$ dans H.

Soit $u \in D(A_H)$, alors

$$\|A_H u\|_H = \|Au\|_H \leq \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2} = \|u\|_{D(A_H)}.$$

Donc, A_H est continue et par suite c'est un isomorphisme de $D(A_H)$ muni de la norme $\|.\|_{D(A_H)}$ dans H. $\square$

Remarque 2.7. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a*

$$\|A_H^{-1}\| \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}$$

où c_1 et c_2 sont respectivement les constantes de la continuité des deux injections $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$.

En effet, soit $u \in D(A_H)$. Alors, en utilisant l'injection continue $V \hookrightarrow H$, on obtient

$$\|u\|_{D(A_H)}^2 = \|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2 \leq c_1^2 \|u\|_V^2 + \|A_H u\|_H^2.$$

Comme $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$ d'après la remarque 2.2 et l'injection $H \hookrightarrow V'$ est continue, alors

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|Au\|_{V'} \leq \frac{c_2}{\alpha}\|Au\|_H = \frac{c_2}{\alpha}\|A_H u\|_H.$$

Donc

$$\|u\|_{D(A_H)}^2 \leq \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2 \|A_H u\|_H^2 + \|A_H u\|_H^2 = \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right) \|A_H u\|_H^2.$$

D'où

$$\|u\|_{D(A_H)} \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2} \|A_H u\|_H.$$

Par suite

$$\|A_H^{-1}\| \leq \left(1 + \left(\frac{c_1 c_2}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}.$$

3 Equation variationnelle dans un espace de Banach

Définition 3.1. *Soient V un espace normé et A un opérateur défini sur V à valeurs dans V'. On dit que*

1) *A est monotone de V dans V', si*

$$< Au - Av, u - v >_{V',V} \geq 0 \quad \forall u,\, v \in V.$$

2) *A est monotone stricte de V dans V', s'il est monotone et*

$$< Au - Av, u - v >_{V',V} = 0 \Longleftrightarrow u = v.$$

3) *A est fortement monotone de V dans V', s'il existe $C > 0$ et $p \geq 1$ tels que*

$$< Au - Av, u - v >_{V',V} \geq C\|u - v\|^p \quad \forall u,\, v \in V.$$

4) *A est borné, s'il transforme tout borné en un borné.*

5) *A est hémicontinu, si pour tous $u,\, v,\, w \in V$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\lambda \longrightarrow < A(u + \lambda v), w >_{V',V}$ est continue.*

Théorème 3.1. ***(Théorème de Minty-Browder)***

Soit V un espace de Banach réflexif et séparable sur $\mathbb{R}$. Soit A un opérateur monotone, hémicontinu et borné de V dans V' et coercif au sens suivant

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors, A est surjectif, c'est à dire

$$\forall\, f \in V',\ \exists\, u \in V \ \text{ tel que } \ Au = f \ \text{ dans } V'.$$

Si de plus, A est strictement monotone, alors A est bijectif.

Avant de donner la preuve, on a besoin de certains résultats préliminaires.

Lemme 3.2. *Soit V un espace de Banach réflexif sur $\mathbb{R}$. Soit A un opérateur monotone, hémicontinu et borné de V dans V'. Alors, A est continu de V fort dans V' faible.*

Preuve. Soit $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$ dans V fort. Montrons que $Au_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible, c'est à dire que

$$< Au_n, v > \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} < Au, v > \quad \forall v \in V.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $y \in V$ tel que $< Au_n, y > \not\longrightarrow < Au, y >$.

Comme A est borné, alors $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans V' qui est réflexif, d'où on peut extraire une sous suite

$(Au_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ dans V' faible.

Comme A est monotone, alors

$$< Au_{n_k} - Av, u_{n_k} - v > \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Comme $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans V fort et $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ dans V' faible, alors

$$< Au_{n_k}, u_{n_k} - v > \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} < f, u - v > \quad \forall v \in V$$

et

$$< Av, u_{n_k} - v > \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} < Av, u - v > \quad \forall v \in V.$$

D'où

$$< f - Av, u - v > \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Soit $w \in V$ quelconque. Alors, en prenant $v = u - \lambda w$ où $\lambda > 0$, on obtient

$$< f - A(u - \lambda w), w > \geq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Et en prenant $v = u + \lambda w$ où $\lambda > 0$, on obtient

$$< f - A(u + \lambda w), w > \leq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

En utilisant le fait que A est hémicontinu et en faisant tendre λ vers 0 dans les deux inégalités précédentes, on obtient

$$< f - Au, w > = 0.$$

Ceci pour tout $w \in V$. Donc, $f = Au$. C'est à dire, $Au_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible. D'où, en particulier

$$< Au_{n_k}, y > \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < Au, y > .$$

Ce qui est absurde. Donc, $Au_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} Au$ dans V' faible. La preuve est terminée. $\square$

Lemme 3.3. *Soit F une application continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ telle que*

$$\exists\, r > 0 \text{ tel que } (F(x), x) \geq 0 \text{ pour tout } \|x\| = r.$$

Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x_0\| \leq r$ et $F(x_0) = 0$.

La preuve du lemme 3.3 est basée sur le théorème du point fixe suivant.

Théorème 3.2. ***(Théorème de Brouwer)***

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^N$ et soit T une fonction continue de K dans K. Alors, T admet un point fixe.

Preuve du lemme 3.3. On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in \overline{B(0,r)},\ F(x) \neq 0$.

Considérons l'application T définie sur $\overline{B(0,r)}$ par

$$T(x) = -r\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Alors, T est à valeurs dans $\overline{B(0,r)}$ et est continue, donc d'après le théorème 3.2, elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $y \in \overline{B(0,r)}$ vérifiant

$$y = T(y) = -r\frac{F(y)}{\|F(y)\|}.$$

D'où,

$$\|y\| = r \quad \text{et} \quad (F(y), y) = (F(y), T(y)) = \left(F(y), -r\frac{F(y)}{\|F(y)\|}\right) = -r\|F(y)\| < 0.$$

Ce qui est absurde. Ceci termine la preuve. □

Maintenant, on est en mesure de démontrer le théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1. Elle va se faire en deux étapes.

Etape 1**.** L'unicité.

Supposons que A est strictement monotone.

Soit $f \in V'$. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, c'est à dire

$$Au_1 = Au_2 = f,$$

alors, $Au_1 - Au_2 = 0$ et par suite

$$< Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 >= 0.$$

D'où, $u_1 = u_2$.

Etape 2**.** L'existence.

Elle se fait par une méthode d'approximation, appelée méthode de Galerkin.

Comme V est séparable, alors il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ libre et totale dans V, c'est à dire, elle est formée d'éléments linéairement indépendants et l'espace engendré par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans V.

On note par V_m l'espace vectoriel engendré par $(w_1,\cdots,w_m)$ muni de la norme induite par celle de V. Comme V_m est de dimension finie, alors il est fermé et toutes les normes sur V_m sont équivalentes.

On munit V_m de la norme $\|.\|_{V_m}$ associée au produit scalaire défini par

$$\forall\, x,\, y\in V_m,\quad x=\sum_{k=1}^{m}x_kw_k,\quad y=\sum_{k=1}^{m}y_kw_k,\quad (x,y)_{V_m}=\sum_{k=1}^{m}x_ky_k.$$

Donc, V_m est un espace de Hilbert.

Soit $f\in V'$.

(i) Montrons qu'il existe $u_m\in V_m$ tel que

$$<Au_m,w_k>=<f,w_k>\quad \forall k=1,\cdots,m. \qquad (1)$$

D'après le théorème de Riesz-Fréchet, pour tout élément $g\in V_m'$, il existe un unique élément $\phi_m^{-1}(g)\in V_m$ tel que

$$<g,x>=(x,\phi_m^{-1}(g))_{V_m}=(\phi_m^{-1}(g),x)_{V_m}\quad \text{pour tout } x\in V_m,$$

où ϕ_m est l'isomorphisme canonique de V_m dans V_m'.

En particulier, $Au_m-f\in V'\subset V_m'$ et donc l'équation (1) devient

$$<Au_m-f,w_k>=(\phi_m^{-1}(Au_m-f),w_k)_{V_m}=0\quad \forall k=1,\cdots,m,$$

c'est à dire

$$\phi_m^{-1}(Au_m-f)=0.$$

On considère maintenant l'application F définie par

$$F(x)=\phi_m^{-1}(Ax-f)\quad \text{pour tout } x\in V_m.$$

Il est clair que $F(x)\in V_m$. Montrons que F est continue de V_m dans V_m.

Soit $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans V_m. Alors d'après le lemme 3.2,

$$Ax_n - f \rightharpoonup Ax - f \ \text{ faible dans } V'_m.$$

Comme ϕ_m^{-1} est linéaire continue de V'_m dans V_m, alors

$$\phi_m^{-1}(Ax_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_m^{-1}(Ax - f) \quad \text{dans } V_m.$$

C'est à dire

$$F(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x) \quad \text{dans } V_m.$$

Par suite F est continue de V_m dans V_m.

De plus, pour tout $x \in V_m \subset V$, on a

$$(F(x), x) = (\phi_m^{-1}(Ax - f), x)_{V_m} =< Ax - f, x >\geq< Ax, x > -\|f\|_{V'}\|x\|_V \underset{\|x\|_V\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où, en utilisant le fait que la norme induite par V et la norme $\|.\|_{V_m}$ sont équivalentes sur V_m ,

$$\exists\, r > 0 \ \text{ tel que } (F(x), x) \geq 0 \ \text{ pour tout } \ \|x\|_{V_m} = r.$$

Par suite, d'après le lemme 3.3, il existe $u_m \in V_m$ tel que $F(u_m) = 0$, c'est à dire u_m est solution de (1).

(ii) Estimation à priori.

Comme $u_m \in V_m$, alors

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} x_{m_k} w_k \quad \text{ où } \ x_{m_k} \in \mathbb{R}.$$

D'après l'équation (1), on a

$$< Au_m, u_m >=< f, u_m > .$$

D'où

$$< Au_m, u_m >\leq \|f\|_{V'}\|u_m\|_V.$$

Et comme

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{< Av, v >}{\|v\|} = +\infty,$$

alors nécessairement $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V. Or A est borné, d'où $(Au_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V'.

(iii) Passage à la limite.

Comme V est réflexif alors V' est réflexif ; on peut donc extraire deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Au_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } V \text{ faible et } Au_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} \varphi \text{ dans } V' \text{ faible.}$$

Montrons que $\varphi = Au = f$. Pour cela, on se fixe $j \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \geq j$, on a

$$< Au_k, w_j >=< f, w_j > .$$

Donc, en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$< \varphi, w_j >=< f, w_j > .$$

Ceci pour tout $j \in \mathbb{N}$. Mais la suite $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est totale dans V, d'où

$$< \varphi, v >=< f, v > \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Par suite, $\varphi = f$.

D'autre part, A est monotone, d'où pour tout $v \in V$,

$$0 \leq< Au_k - Av, u_k - v >_{V',V}=< Au_k, u_k >_{V',V} - < Au_k, v >_{V',V} - < Av, u_k - v >_{V',V}$$

$$=< f, u_k > - < Au_k, v >_{V',V} - < Av, u_k - v >_{V',V} .$$

Donc, en passant à la limite quand $k \to +\infty$, on obtient pour tout $v \in V$,

$$0 \leq< f, u > - < f, v >_{V',V} - < Av, u - v >_{V',V}=< f - Av, u - v >_{V',V} .$$

Soit $w \in V$. Prenons $v = u - \lambda w$ où $\lambda > 0$, alors

$$< f - A(u - \lambda w), w >_{V',V} \geq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

En utilisant le fait que A est hémicontinu et en faisant tendre λ vers 0, on déduit que

$$< f - Au, w >_{V',V} \geq 0.$$

Ceci a lieu pour tout $w \in V$. En changeant w en $-w$, on obtient

$$< f - Au, w >_{V',V} = 0 \quad \text{pour tout } w \in V.$$

D'où, $f = Au$, ce qui prouve que A est surjectif. La preuve est terminée. $\square$

4 Application au problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On se propose d'étudier le problème de Dirichlet suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (2) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur Ω et $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Définition 4.1. ***(Solution classique)***

Soit $f \in C(\overline{\Omega})$.

On appelle solution classique du problème de Dirichlet (P), toute fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (1) et (2).

Si f n'est pas continue sur $\overline{\Omega}$, pour résoudre le problème (P), on va appliquer le théorème de Lax-Milgram en le ramenant à un poblème variationnel.

Pour déterminer la forme bilinéaire a, on fait un calcul formel.

Supposons que u est régulière. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, on a

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\varphi\,d\sigma + \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\varphi = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$, par suite

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx + \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Il faut signaler que la formule précédente est bien définie si on a seulement $u,\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$. D'où la définition suivante.

Définition 4.2. ***(Solution faible)***

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.

On appelle solution faible du problème de Dirichlet (P)*, toute fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *vérifiant*

$$< \nabla u, \nabla v >_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} + < u, v >_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} = < f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Remarque 4.1. *Si* $f \in L^2(\Omega)$*, la solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *est définie par*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 4.2. ***(Existence et unicité de la solution faible)***

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$*. Alors, le problème de Dirichlet* (P) *admet une unique solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$*. De plus,* u *minimise dans* $H_0^1(\Omega)$ *la fonctionnelle*

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} .$$

Preuve. On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = < f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

La formulation faible du problème (P) devient : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous allons vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert puisqu'il est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$.

$L = f$ est bien une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ (par définition de $H^{-1}(\Omega)$).

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\, v \in H_0^1(\Omega)$, alors $u,\, v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u,\, \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $uv \in L^1(\Omega)$ et $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = \left|(u,v)_{H^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x)v(x)\, dx =< f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, comme a est symétrique, u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} - < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}\right].$$

C'est à dire

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

La preuve est terminée. $\square$

Remarque 4.3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a l'estimation à priori suivante*

$$\|u\|_{H^1((\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

En effet, on a

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = a(u,u) =< f, u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où, le résultat.

Proposition 4.3. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors, la solution u du problème de Dirichlet (P) appartient à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.*

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press 1975.

[2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Ecole polytechnique 2005.

[3] L. Boutet de Monvel, Introduction aux équations aux dérivées partielles, Paris 7, 1974.

[4] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson 1983.

[5] R. Dautray, J. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, vol 3, Masson 1984.

[6] R. Dautray, J. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique, vol 4, Masson 1988.

[7] L.C. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics 1998.

[8] A. Henrot, Equations aux dérivées partielles, Nancy 2005.

[9] P. Rabier, J.M. Thomas, Exercices d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson 1985.

[10] A. Raviart, J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson 1983.

[11] L. Schwartz , Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann, Paris 1961.

[12] L. Schwartz , Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

[13] C. Zuily, Problèmes sur les distributions et les EDP, Hermann, Paris 1988.