Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

1. **Définitions de base**
2. **Terminologie et réduction à l'ordre 1**
3. **Problème de Cauchy**
4. **Unicité locale**
5. **Les Théorèmes d'existence locale**
6. **Prolongement des solutions locales, solutions maximales**
7. **Propriétés qualitatives des solutions**

Dans cette section on commence par la notion de solutions approchées.

Définition 1.1 (d'une solution $\varepsilon-$ approchée)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I \times U;\ E)$ où $I \times U$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $\varepsilon > 0$.
une fonction $\varphi : J \to U$ est dite solution $\varepsilon-$ approchée de l'équation
$x'(t) = f(t, x(t))$ si
***(i)** $J \subset I$,*
***(ii)** $\varphi \in \mathcal{C}^0(J, U)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (i.e. il existe m intervalles I_k disjoints deux à deux tels que $J = \bigcup_{k=1}^{m} (\bar{I}_k)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\bar{I}_k)$ pour chaque $k = 1, .., m$),*
***(iii)** Sur tout sous intervalle $K \subseteq J$ où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ on a*

$$\left\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\right\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in K.$$

On se fixe maintenant un point $(t_0, x_0) \in J \times U$ et deux réels $a, r > 0$ et on pose

$$V := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, r) \subseteq J \times U.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 1.1

Soient $M = \underset{(t,x)\in V}{Sup} \|f(t,x)\|$ *et* $\alpha = \min(a, r/M)$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une solution* $\varepsilon-$*approchée* $u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,; \overline{B}(x_0, r))$ *du problème de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & (E) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus

$$\|u(t) - u(s)\| \leq M\,|t - s| \quad \forall t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,.$$

La preuve de la proposition est basée sur le résultat suivant.

Lemme 1.1

Soit $\varphi : J \to U$ une solution $\varepsilon-$approchée de l'équation (E). Alors

$$\left\| \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \varepsilon \left\| t - t_0 \right\| \quad \forall t, t_0 \in J.$$

Démonstration

On suppose $t > t_0$ (le cas $t < t_0$ se traite de la même façon). Il existe une subdivision du segment $[t_0, t]$:

$$t_0 = s_0 < s_1 < .... < s_m = t$$

telle que pour chaque $i = 0, ..., m-1$, la restriction de la fonction φ à $[s_i, s_{i+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'où

$$\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i) = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi'(s)ds.$$

Démonstration (suite)

Or

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds=\sum_{i=0}^{m-1}\left[\varphi(s_{i+1})-\varphi(s_i)-\int_{s_i}^{s_{i+1}} f(s,\varphi(s))ds\right].$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(t)-\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\right\| &\leq \sum_{i=0}^{m-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\|\varphi'(s)-f(s,\varphi(s))\right\| ds\\ &\leq \varepsilon \left\|t-t_0\right\|.\end{aligned}$$

$\square$

Démonstration de la Proposition 1.1

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est uniformément continue sur le compact V, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t,x),(s,y) \in V$ vérifiant

$$|t-s| \leq \delta \text{ et } \|x-y\| \leq \delta.$$

On a

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leq \varepsilon.$$

On subdivise le segment $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ en $2n$ intervalles :

$$t_0 - \alpha = t_{-n} < t_{-n+1} < ... < t_{-1} < t_0 < t_1 .... < t_n = t_0 + \alpha,$$

tel que

$$\max_{i= -n+1,..n} |t_{i-1} - t_i| \leq \min(\delta, \delta/M).$$

Démonstration (suite)

On définit la fonction u sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ de la façon suivante :

$$u(t_0) = x_0$$

et pour $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$,

$$u(t) = \begin{cases} u(t_i) + (t-t_i) f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0, \\ u(t_{i+1}) + (t-t_{i+1}) f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1. \end{cases}$$

On affirme que $u \in \mathcal{C}^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha]\,; \overline{B}(x_0, r))$. En effet, comme l'expression de u est donnée sur chaque segment $[t_i, t_{i+1}]$ par la droite qui passe par le point $(t_i, u(t_i))$ et ayant pour pente $f(t_i, u(t_i))$; alors elle est continue sur $\left]t_i, t_{i+1}\right[$.

Démonstration (suite)

De plus

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_{i+1}^-} u(t) &= u(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, u(t_i)) \\ \text{et } \lim_{t\to t_{i+1}^+} u(t) &= u(t_{i+1})\end{aligned}$$

et par construction $u(t) = u(t_i) + (t - t_i)f(t_i, u(t_i))$. D'où u est bien continue au point t_{i+1}. Par suite u est continue sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. On montre facilement que pour tout $t, s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq M\,|t - s|\,.$$

D'où

$$u'(t) = \begin{cases} f(t_i, u(t_i)) & \text{si } i \geq 0 \\ f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) & \text{si } i \leq -1 \end{cases}$$

Démonstration (suite)

De plus $\|u(t) - u(t_i)\| \leq \delta$. On en déduit que u est bien une solution $\varepsilon-$approchée de (PC). $\square$

Comme conséquence on va montrer le résultat d’existence locale pour des fonctions qui sont continues.

Théorème 1.1 (de Cauchy-Peano)

Soit $D = I \times U$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times E$ *et soit* f *une fonction définie et continue sur* D *à valeurs dans* E*. Alors pour chaque* $(t_0, x_0) \in D$ *il existe* $\alpha > 0, r > 0$ *tels que* $J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$*, et il existe **au moins** une fonction* $u \in \mathcal{C}^1(J_\alpha\ , \overline{B}(x_0, r))$ *solution du problème de Cauchy :*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J_\alpha, \\ x(t_0) = x_{0.} \end{cases}$$

La preuve est basée sur le théorème admis suivant.

Théorème 1.2 (d'Arzela-Ascoli)

Soit K un espace métrique compact et soit F un espace de Banach. Un sous-espace L de $C^0(K, F)$ *est relativement compact (i.e.*$\overline{L}$ *est compact) si et seulemnt si :*
(i) L est équicontinue, i.e. $\forall y \in K,\ \forall \varepsilon > 0, \exists$ *un voisinage V de y dans K tels que* $\|g(x) - g(y)\| < \varepsilon \qquad \forall x \in V, \forall g \in L,$
(ii) l'ensemble $L(y) := \{g(y); g \in L\}$ *est relativement compact dans F pour tout* $y \in K$*.*

Remarque 1.1

Dans le cas où F est de dimension finie, le Théorème d'Arzela-Ascoli reste valable si on remplace la propriété (ii) par la propriété L(y) est borné pour tout $y \in K$*.*

Démonstration du Théorème de Cauchy -Peano

D'après la Proposition 1.1, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ il existe u_n une solution $\frac{1}{n}-$ approchée sur $J_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ telle que $u_n([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$ et vérifiant

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq M\,|t - s| \quad \forall t, s \in J_\alpha(t_0).$$

Posons

$$L = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

L est un sous-espace de $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$. De plus d'après la relation précédente l'ensemble L est équicontinue. D'autre part comme

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)\| \leq \|u_n(t_0)\| + M\,|t - t_0| &\leq \|x_0\| + r + \alpha M \\
&\leq \|x_0\| + 2r \quad \forall t \in J_\alpha(t_0),
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

alors L est borné dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et par suite d'après le théorème d'Arzela- Ascoli L est relativement compact dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$. Donc il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n_k} \to u$ dans $\mathcal{C}^0(J_\alpha(t_0), E)$ et par suite u_{n_k} converge uniformément vers u. Comme pour tout $t \in J_\alpha(t_0)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_{n_k}(s))ds \right\| \leq \frac{1}{n_k} \left| t - t_0 \right|,$$

en faisant tendre k vers ∞ on obtient

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \quad \forall t \in J_\alpha(t_0).$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Lorsque f est plus régulière on a un résultat plus précis.

Théorème 1.3 (d'existence locale)

Soit $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et soit f une fonction définie et continue sur D à valeurs dans E. On suppose que f ***est localement Lipschitzienne en*** *x* ***uniformément par rapport à*** *t. Alors pour chaque $(t_0, x_0) \in D$ il existe α tel que $J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$, et il existe une* ***unique*** *fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(J_\alpha, E)$ solution du problème de Cauchy :*

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in J_\alpha, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque 1.2

L'intervalle J_α n'est pas unique ; par contre une fois J_α fixé, la fonction φ est unique.

Avant de donner la démonstration, rappelons le résultat suivant.

Théorème 1.4 (du point fixe de Picard)

Soit (X, d) *un espace métrique complet et soit* $f : X \to X$ *une application strictement contractante, c'est à dire il existe* $0 < k < 1$ *tel que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Alors f *possède un unique point fixe* x*, c'est à dire il existe un unique* $x \in X$ *tel que* $f(x) = x$.

De plus pour tout $a \in X$ *la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = a \end{array} \right.$

converge vers le point fixe x *et on a* $d(x, x_n) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(a, x_1)$.

Démonstration du théorème 1.3

Puisque $(t_0, x_0) \in D$ qui est un ouvert alors il existe $a > 0$ et $r > 0$ tels que $V = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, r) \subset D$. Notons par

$$M = \underset{(t,\ x) \in V}{Sup} \|f(t,x)\|.$$

M existe car f est continue sur le compact V. Comme f est localement Lipschitzienne en x uniformément par rapport à t, alors elle est Lipschitzienne par rapport à x sur la boule $\overline{B}(x_0, r)$; de constante de Lipschitze notée K_r.

Démonstration (suite)

Posons

$$\alpha = \min(a, r/M, 1/2K_r) \text{ et } J_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

et considèrons l'espace $X = \mathcal{C}^0(J_\alpha, \overline{B}(x_0, r))$, l'ensemble des fonctions continues sur J_α à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la distance

$$d(u, v) = \max_{t \in J_\alpha} \|u(t) - v(t)\| \text{ pour tout } u, v \in X.$$

(X, d) est un espace métrique complet.
On définit sur X l'application g par

$$g(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \text{ pour tout } u \in X \text{ et pour tout } t \in J_\alpha.$$

Montrons que g vérifie le théorème du point fixe.

Démonstration (suite)

(i) g opère de X dans X.

En effet, soit $u \in X$. Comme f est continue alors $g(u)$ est bien définie et continue sur J_α, de plus pour tout $t \in J_\alpha$ on a

$$\|g(u)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\| \, ds \right| \leq M\,|t - t_0| \leq M\,\alpha \leq r.$$

D'où $g(u) \in X$.

(ii) g est une contraction stricte, c'est à dire il existe $k < 1$ tel que

$$d(g(u), g(v)) < k\, d(u, v) \text{ pour tout } u, v \in X.$$

Démonstration (suite)

Soient $u, v \in X$ et $t \in J_\alpha$. Alors d'après le choix de α on a

$$\begin{aligned}
\|g(u)(t) - g(v)(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| \, ds \right| \\
&\leq K_r \left| \int_{t_0}^{t} \|u_r(s) - v(s)\| \, ds \right| \\
&\leq K_r \max_{t \in J_\alpha} \|u(t) - v(t)\| \, |t - t_0| \\
&\leq K_r \, \alpha \, d(u, v) \leq \frac{1}{2} d(u, v).
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

Conclusion, d'après le théorème du point fixe, la fonction g admet un unique point fixe appartenant à l'espace X c'est à dire il existe une unique fonction $\varphi \in X$ vérifiant

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \text{ pour tout } t \in J_\alpha.$$

ce qui veut dire que φ est une solution intégrale du problème (P) et comme φ est continue alors elle est solution de (P). Ce qui achève la preuve du Théorème. $\square$

Proposition 1.2

Soient $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, f une fonction définie et continue sur D à valeurs dans E. On suppose que f est localement Lipschitzienne en x uniformément par rapport à t. Soit K un compact de D, alors il existe $\varepsilon (= \varepsilon(K))$ tel que pour chaque $(t_0, x_0) \in K$ le problème

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration

On se donne $(t,y) \in K$. Soit $\delta(t,y) > 0$, tel que

$$J = [t_0 - \delta(t,y), t_0 + \delta(t,y)] \subset I, \text{ et } \overline{B}(y, \delta(t,y)) \subset U.$$

Comme f est continue, alors elle est bornée sur le compact $J \times \overline{B}(y, \delta(t,y))$. D'où il existe $M(t,y) > 0$ tel que

$$\|f(s,z)\| \leq M(t,y) \text{ pour tout } (s,z) \in J \times \overline{B}(y, \delta(t,y)).$$

De plus comme f est localement Lipschitzienne, alors elle est Lipschitzienne sur le compact $J \times \overline{B}(y, \delta(t,y))$ et par suite il existe $L(t,y) > 0$ tel que

$$\|f(s,z) - f(s,u)\| \leq L(t,y)\, \|z-u\|$$

pour tout $(s,z,u) \in J \times \overline{B}(y, \delta(t,y)) \times \overline{B}(y, \delta(t,y))$.

Démonstration (suite)

Posons

$$V(t,y) = \left]t - \frac{1}{2}\delta(t,y), t + \frac{1}{2}\delta(t,y)\right[\times B(y, \frac{1}{2}\delta(t,y)).$$

Alors $(V(t,y))_{(t,y)\in K}$ est un recouvrement de K par des parties ouvertes ; d'après le théorème de Borel-Lebesgue, il existe donc un nombre fini de points $((t_1,y_1),...,(t_n,y_n))$ de K tels que : $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i,y_i)$.

Comme $(t_0,y_0), \in K$ alors Il existe $i \in \{1,...,n\}$ tel que $(t_0,y_0) \in V(t_i,y_i)$.

Démonstration (suite)

Considérons maintenant

$$\overline{M} = \max_{1\leq i \leq n} M(t_i, y_i), \overline{K} = \max_{1\leq i \leq n} L(t_i, y_i),$$

$$\overline{\delta} = \frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n} \delta(t_i, y_i), \quad \varepsilon = \min(\overline{\delta}, \frac{\overline{\delta}}{\overline{\overline{M}}}, \frac{1}{2\,\overline{\overline{L}}}).$$

Alors

$$\left[t_0 - \overline{\delta}, t_0 + \overline{\delta}\right] \subset \left[t_i - \delta(t_i, y_i), t_i + \delta(t_i, y_i)\right], \ \overline{B}(y_0, \overline{\delta}) \subset \overline{B}(y_i, \delta(t_i, y_i)).$$

Démonstration (suite)

Donc

$$\|f(t,y)\| \leq \overline{M} \text{ pour tout } |t-t_0| \leq \overline{\delta} \text{ et } \|y-y_0\| \leq \overline{\delta},$$

$$\|f(t,y)-f(t,z)\| \leq \overline{L}\ \|y-z\|$$

pour tout $|t-t_0| \leq \overline{\delta}$, $\|y-y_0\| \leq \overline{\delta}$.
Par suite on peut appliquer la démonstration du Théorème 1.3 précédent pour déduire l'existence d'une solution unique définie sur $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. □