Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

1. **Définitions de base**
2. **Terminologie et réduction à l'ordre 1**
3. **Problème de Cauchy**
4. **Unicité locale**
5. **Les Théorèmes d'existence locale**
6. **Prolongement des solutions locales, solutions maximales**
7. **Propriétés qualitatives des solutions**

L'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ peut avoir plusieurs solutions. Pour avoir l'unicité, on va imposer à ce que les solutions passent par un point donné (t_0, x_0), appelé condition initiale.

Plus exactement on s'intéresse à la résolution du problème suivant :

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & (E) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

(PC) est appelé **problème de Cauchy** où f est une fonction définie et continue sur un ouvert $D = I \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans E.

Problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy (PC) consiste à déterminer un couple (φ, J) où J est le plus grand intervalle contenant t_0 et contenu dans I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans E tels que

$$\left\{\begin{array}{l} (t,\varphi(t)) \in D = I \times U \quad \text{pour tout } t \in J, \\ \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in J, \\ \text{et } \varphi(t_0) = x_0. \end{array}\right.$$

Lemme 1.1

Pour qu'une application ***continue*** φ *de* J *à valeurs dans* U *soit solution du problème de Cauchy* (PC), *il faut et il suffit que*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \textit{pour tout } t \in J \quad (PCI)$$

Démonstration.

La condition nécessaire est évidente ; il suffit d'intégrer l'équation différentielle (E) entre t_0 et $t \in J$.

Inversement, si l'application $\varphi : J \to U$ est continue et vérifie la formule (PCI) , alors le membre de droite de cette formule est dérivable en tout point $t \in J$ de dérivée $f(t, \varphi(t))$ et de plus si on fait $t = t_0$ on obtient $\varphi(t_0) = x_0$.. $\square$

Remarque 1.1

(i) *L'intégrale vectorielle* $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds$ *est donnée par*

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s,\varphi(s))ds, ..., \int_{t_0}^{t} f_n(s,\varphi(s))ds\right).$$

(ii) *Une fonction* φ *donnée par la formule* (PCI) *est dite solution intégrale.*

Unicité locale

On commence ce paragraphe par un résultat important pour la théorie des équations différentielles.

Lemme 2.1 (Lemme de Gronwall)

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in J$, u et v deux fonctions continues de J à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$v(t) \leq M + \left| \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds \right| \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

Alors

$$v(t) \leq M \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \right| \right) \quad \textit{pour tout } t \in J.$$

Démonstration

On suppose $t \geq t_0$ (le cas $t \leq t_0$ se traite de la même façon).
On pose

$$w(t) = M + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\,ds \ \text{ pour tout } t \in J.$$

Les fonctions u, v sont continues donc w est dérivable et on a

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t),$$

c'est à dire

$$\left[w(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds) \right]' \exp(\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds) \leq 0$$

Unicité locale

Démonstration (suite)

D'où la fonction $t \to w(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} u(s)\ ds)$ est décroissante sur $J \cap [t_0, \infty[$. Par suite

$$w(t)\exp(-\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds) \leq w(t_0) = M \ \text{ pour tout } t \in J \cap [t_0, \infty[\,.$$

D'où on en déduit que pour tout $t \in J \cap [t_0, \infty[$,

$$v(t) \leq M\exp(\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds) = M\exp(\left|\int_{t_0}^{t} u(s)\,ds\right|)ds.$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Définition 2.1

Soit f une fonction définie sur un ensemble $D = I \times U$ à valeurs dans un espace normé E de norme notée $\|.\|$.
i) *On dit que f est Lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leq k\left[|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|\right] \quad \forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in D$$

ii) *On dit que f est Lipschitzienne en x uniformément par rapport à t, s'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\,\|x_1 - x_2\| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

Définition 2.1 (Suite)

iii) *On dit que* f *est localement Lipschitzienne en* x *uniformément par rapport à* t *si pour tout* $(t, x) \in D$ *il existe un réel* k *et un voisinage* V *de* (t, x)*,inclus dans* D *vérifiant*

$$\|f(s, x_1) - f(s, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad \forall (s, x_1), (s, x_2) \in V.$$

Remarque 2.1

Si f *est Lipschitzienne alors* f *est continue sur* D*. Mais si* f *est seulement Lipschitzienne en* x *, alors elle n'est pas nécessairement continue sur* D*.*

Unicité locale

Proposition 2.1

Soit f une fonction définie sur un ouvert D à valeurs dans un normé E.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle est localement Lipschitzienne en x uniformément par rapport à t.

Unicité locale

Démonstration.

Soit (t,x) un élément de D. Comme D est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que $V = [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \times \overline{B}(x,r) \subset D$. De plus comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $k = \underset{(s,\,y) \in V}{Sup} \|\nabla_x f(s,y)\|$ existe et d'après le théorème des accroissements finis,

$$\|f(s,x_1) - f(s,x_2)\|_E \leq k\,\|x_1 - x_2\|_E \quad \forall (s,x_1),(s,x_2) \in V.$$

Ce qui prouve le résultat voulu. $\square$

Unicité locale

Proposition 2.2

*Soit f une fonction **Lipschitzienne** en x uniformément par rapport à t.*
Soient (φ_1, J_1) et (φ_2, J_2) deux solutions de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$.
S'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, alors φ_1 et φ_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$.

Unicité locale

Démonstration

Comme φ_1 et φ_2 vérifient respectivement

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s))ds \quad \text{pour tout } t \in J_1,$$

et

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_2(s))ds \quad \text{pour tout } t \in J_2,$$

alors

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)) \right] ds \quad \text{pour tout } t \in J_1 \cap J_2.$$

Unicité locale

Démonstration (suite)

Or la fonction f est Lipschitzienne en x uniformément par rapport à t, donc il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$,

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \, ds \right| .$$

Appliquons maintenant le Lemme de Gronwall avec $u(s) = \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|$ et $v(s) = k$, on en déduit que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$. $\square$

Lemme 2.2

Soient $f : W \to E$ une fonction localement Lipschitzienne et K un compact de W, alors la restriction de f à K est Lipchitzienne.

Démonstration

Elle va se faire par l'absurde en supposant que f n'est pas Lipschitzienne sur K. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists (x_n, y_n) \in K \times K \text{ tel que } \|f(x_n) - f(y_n)\| > n \|x_n - y_n\| .$$

Comme K est compact on peut extraire deux sous-suites x_{n_k} et y_{n_k} telles que $x_{n_k} \to x$ et $y_{n_k} \to y$ quand k tend vers l'infini (où x et y sont deux éléments de K).

Unicité locale

Démonstration (suite)

Or f est continue d'où $f(x_{n_k}) \to f(x)$ et $f(y_{n_k}) \to f(y)$; ce qui implique que

$$\begin{cases} \|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \to \|f(x) - f(y)\| \\ \text{et } \ \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \to \|x - y\| \,. \end{cases}$$

On affirme que $x = y$. En effet, supposons $\|x - y\| = \alpha > 0$. Alors

$$\exists\, n_{k_0} > 0 \text{ tel que } \forall\, n_k \geq n_{k_0}, \|x_{n_k} - y_{n_k}\| > \alpha/2$$

et alors $\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| > \ n_k\, \alpha/2 \to \infty$; ce qui est impossible.
Ainsi comme $x = y \ \in E$, et f est localement Lipschizienne alors il existe un voisinage U de x et il existe $L > 0$ tels que

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L\,\|u - v\| \qquad \forall (u, v) \in U \times U.$$

Démonstration (suite)

Or pour k assez grand on a $x_{n_k} \in U$ et $y_{n_k} \in U$ et alors

$$\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| > n_k \|x_{n_k} - y_{n_k}\|,$$

ce qui contredit le fait que $\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \leq L \|x_{n_k} - y_{n_k}\|$. Ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 2.1

*Soit f une fonction continue par rapport à t et **localement Lipschitzienne** en x uniformément par rapport à t. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ sur un même intervalle J et ayant même valeur en un certain point alors $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Démonstration

Elle va se faire par l'absurde. Supposons qu'il existe deux points t_0 et t_1 appartenant à J tels que

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) \text{ et } \varphi_1(t_1) \neq \varphi_2(t_1).$$

Sans perdre en généralité on suppose que $t_1 > t_0$. Posons

$$T = \inf \{t \in J;\ t > t_0 \text{ et } \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}.$$

Démonstration (suite)

T est bien défini. De plus, comme les deux fonctions φ_1 et φ_2 sont continues alors $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$. Prenons $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [T, T+\alpha]$, $(t, \varphi_1(t))$ et $(t, \varphi_2(t))$ restent dans un voisinage V de $(T, \varphi_1(T))$ (ceci est possible grâce toujours à la continuité de φ_1 et φ_2). Or sur $[T, T+\alpha]$,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f(t, \varphi_1(t)), \quad \varphi_2'(t) = f(t, \varphi_2(t)) \\ \text{et } \varphi_1(T) = \varphi_2(T). \end{cases}$$

En intégrant sur $[T, t] \subset [T, T+\alpha]$ et en faisant la différence on obtient

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_T^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\, ds\,.$$

Unicité locale

Démonstration (suite)

Enfin, comme f est localement Lipschitzienne, donc d'après le Lemme 2.2, la fonction $s \to f(s, \varphi_1(s))$ est Lipschitzienne sur le compact $[T, T+\alpha]$ et alors il existe $K > 0$ tel que

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq K \int_T^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| \, ds \, .$$

et donc d'après le Lemme de Gronwall on déduit que

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \text{ pour tout } t \in [T, T+\alpha] \, .$$

Ce qui contredit la définition de T. $\square$

Unicité locale

Conséquence

Le graphe de deux solutions distinctes d'une même équation différentielle ne peuvent pas se croiser.