Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Plan du Cours

1. **Existence des solutions des EDO**
2. **Équations différentielles linéaires**
3. **Notions de stabilité**

Existence des solutions des EDO

Définitions de base

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation reliant une variable réelle t, une fonction $x(t)$ (l'inconnue) ainsi qu'un certain nombre de ses dérivées ; c'est à dire qu'une équation différentielle ordinaire se présente sous la forme générale suivante :

$$G(t, x(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.1}$$

où G étant une fonction définie sur $I \times U$ à valeurs dans un espace de Banach E (en général de dimension finie), I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un sous-ensemble ouvert de E.

Définition 1.1

*Une **solution** de l'équation (1.1) est une application $x : J \to E$ telle que*
(i) J est un sous-intervalle de I,
(ii) x est de classe C^n dans l'intervalle J,
(iii) Pour tout point $t \in J$, le point $(x(t), ..., x^{(n)}(t)) \in U$ et de plus l'équation (1.1) est vérifiée.

Définition 1.2

*Le nombre n est appelé l'**ordre** de l'équation différentielle.*

Définitions de base

Définition 1.3

*Si la fonction G ne dépend pas explicitement de t, mais seulement de $x(t)$ et de ses dérivées, on dit qu'on a une équation différentielle **autonome** (et dans ce cas $I = \mathbb{R}$).*

Définition 1.4

Si E est l'ensemble $\mathbb{R}$, on dit qu'on a une équation différentielle scalaire.

Définition 1.5

Lorsque la différentielle partielle de G dans la direction $x^{(n)}$ est inversible ; d'après le théorème des fonctions implicites, on peut, au moins localement, se ramener de la forme (1.1) à la forme suivante :

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{1.2}$$

La forme (1.2) est appelée EDO ***normale*** *d'ordre n.*

Exemple

Considérons une équation du type $G(t, u, u') = 0$ où $G : U \to \mathbb{R}$ est une application définie et de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
Pour trouver une solution de ce problème, on peut d'abord déterminer une racine (t_0, x_0, y_0) de l'équation $G(t, x, y) = 0$. Ayant obtenu une telle racine (t_0, x_0, y_0), si l'on a

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, x_0, y_0) \neq 0,$$

d'après le Théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de (t_0, x_0), un voisinage $J \subset \mathbb{R}$ de y_0, et une application $F : V \to J$ de classe C^1 tels que

$$G(t, x, F(t, x)) = 0 \quad \forall (t, x) \in V.$$

Toute solution de $u' = F(t, u)$ sera alors une solution de $G(t, u, u') = 0$.

Toute la théorie des équations différentielles ordinaires sera dévelopée pour les équations normales.

Une équation différentielle **autonome d'ordre 1** se présente sous la forme :

$$x'(t) = F(x(t)) \qquad (E)$$

On dit alors que l'équation (E) est définie par le champ de vecteur $x \to F(x)$ (défini dans U).
La raison de cette terminologie est la suivante : Soit x une solution de (E) définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$; alors l'image $x(J) = \Gamma$ est une courbe dans U paramétrée par x. D'où en un point $x(t_0)$ tel que $F(x(t_0)) \neq 0$, la courbe Γ admet une tangente dont la direction est précisément engendrée par $F(x(t_0))$.

Pour pouvoir présenter la théorie sous un aspect plus unifié on montre le résultat suivant.

Proposition 2.1

Toute équation différentielle normale d'ordre n se ramène à un système de n équations différentielles d'ordre 1.

Démonstration

Posons

$$X(t) = (x(t), x_1(t), ..., x_{n-1}(t)) = \left(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)\right).$$

Alors l'équation différentielle normale

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

Démonstration (suite)

s'écrit sous la forme suivante :

$$X'(t) = f(t, X(t)).$$

où $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ est un vecteur de E^n défini par :

$$(f_1(t, X(t)),\ f_2(t, X(t)), ...,\ f_{n-1}(t, X(t)),\ f_n(t, X(t))^T = (x_1(t), ..., x_{n-1}(t), F(t, X(t)))^T.$$

□

Conséquence

Etudier les équations différentielles **normales d'ordre** n revient à étudier les équations différentielles **vectorielles normales d'orde** 1.

Donc pour présenter la théorie des équations différentielles ordinaires il suffit de le faire pour les EDO d'ordre 1.

Plus exactement on se donne E un ensemble de **dimension finie**, $D = I \times U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f : D \to E$ une fonction continue, et on s'intéresse à l'équation différentielle normale suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Terminologie et réduction à l'ordre 1

Définition 2.1

Soit f une fonction définie et continue sur un ouvert $D = I \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ à valeurs dans E. On appelle solution de l'équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (E)$$

tout couple (φ, J) où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et φ est une fonction dérivable sur J à valeurs dans E telle que

(i) $(t, \varphi(t)) \in D$ *pour tout* $t \in J$,

(ii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \ \ \forall t \in J$.

Remarque 2.1

(i) *La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.*

(ii) *Le vecteur tangent au point $\varphi(t)$ est donnée par $f(t, \varphi(t))$.*

(iii) *Le graphe de la solution φ est l'ensemble*

$$\Gamma = \{(t, \varphi(t)); t \in J\} \subseteq \mathbb{R} \times E,$$

Γ *est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.*

(iv) *Si $\dim E = n$, alors φ est un vecteur à n composantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.*

Terminologie et réduction à l'ordre 1

Définition 2.2

Soient (φ_1, J_1), (φ_2, J_2) *deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que* (φ_2, J_2) *est un prolongement de* (φ_1, J_1) *si et seulement si* $J_1 \subset J_2$ *et la restriction de* $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ *pour tout* $t \in J_1$.

Définition 2.3

Soient J_1, J_2 *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *tels que* $J_1 \subset J_2$.

(i) *On dit que* (φ, J_1) *est globale dans* J_2 *si et seulement si* φ *admet un prolongement* ϕ *solution sur tout* $J_{2.}$

(ii) *On dit qu'une solution* (φ, J_1) *est maximale dans* J_2 *si et seulement si* φ *n'admet pas de prolongement* (ϕ, K) *tel que* $J_1 \nsubseteq K \subset J_2$.

Exemple 2.1

Considérons l'équation différentielle : $x'(t) = x^2(t)$. *Alors,*
$(\dfrac{1}{1-t},]-1, 0[)$ *est globale dans* $]-\infty, 0[$ *et* $(\dfrac{1}{1-t},]0, 1[)$ *est maximale dans* $]0, +\infty[$.

Remarque 2.2

Toute solution globale sur un intervalle J est maximale sur J, mais la réciproque est fausse.